فصل اول: مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

تعریف مجموعه‌ها: به دسته‌ای از اشیاء مشخص و دو به دو متمایز، مجموعه گوییم.

نکته: بنابر تعریف بالا هر مجموعه باید دو ویژگی داشته باشد:

الف- کاملا مشخص باشند، یعنی کاملا عضوهای مجموعه شناخته شده باشد.

ب- دو به دو متمایز باشند، یعنی هر دو عضو آن باهم متفاوت باشند.

مثال

گل‌های خوشبو مجموعه نیست. چون معیار مشخص و معینی برای خوشبو بودن نداریم. ممکن است فردی از بوی گل شب‌بو و فردی دیگر از بوی گل رز و گل محمدی و... خوشش بیاید. اما دانش‌آموزان یک کلاس تشکیل مجموعه می‌دهند. چون اعضای کلاس کاملا مشخص هستند.

مثال

تمام اعداد زوج کمتر از ۱۰ را به شکل مجموعه برابر است با:

$$A=\{۲,۴,۶,۸\}$$

مثال

فرض کنید کلاسی دارای ۵ دانش‌آموز به نام‌های امیر، مهدی، حامد، پژمان و کسری باشد. لذا مجموعه این کلاس به قرار زیر است:

$B=\{$ کسری , پژمان , حامد , مهدی , امیر $\}$

مثال

مجموعه اعداد زوج $E=\{۲,۴,۶,۸,\ldots\}$

مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\ldots\}$

مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}$

عضو بودن را با نماد $\in$ نشان می‌دهیم. در مثال بالا $۲\in E$ اما $\frac{۱}{۲}\notin\mathbb{Z}$. یعنی $\frac{۱}{۲}$ عضو مجموعه $\mathbb{Z}$ یا اعداد صحیح نیست یا می‌گوییم $\frac{۱}{۲}$ متعلق به $\mathbb{Z}$ نیست.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

اگر عضوهای دو مجموعه‌ی A و B یکسان باشند و هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد؛ آنگاه دو مجموعه‌ی A و B برابر هستند و می‌نویسیم $A=B$.

مثال

مجموعه‌های $A=\{-۳,۵,\frac{۹}{۳}\}$ و $B=\{۳,\sqrt{۲۵},\frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}\}$ با یکدیگر برابرند. چون:

$$A=\{-۳,۵,\frac{۹}{۳}\}=\{-۳,۵,۳\}$$

$$B=\{۳,\sqrt{۲۵},\frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}\}=\{۳,\sqrt{۲۵},\frac{-۱۲}{۴}\}=\{۳,۵,-۳\}$$

نکته

ترتیب نوشتن اعضای مجموعه و نیز تکرار کردن اعضای یک مجموعه هیچ تاثیری بر مجموعه ندارد.

بنابراین:

$$\{-۳,۵,۳\}=\{۳,۵,-۳\}$$

همچنین:

$$\{۱,۱,۱,۲,۲,۳\}=\{۱,۲,۳\}$$

مثال

آیا مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ و $B=\{۳,۴,۵,...\}$ باهم برابرند؟

پاسخ

این دو مجموعه برابر نیستند، چون ۱ داخل A هست اما داخل B نیست.

بنابراین برای نشان دادن این‌که دو مجموعه باهم برابر نیستند، باید نشان دهیم حداقل یک عضو در یک مجموعه هست که در مجموعه‌ی دیگر نیست. در این مثال: $1\notin B$ و $1\in A$.

مثال

کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم برابرهستند؟

الف) مجموعه‌ی اعداد اول زوج و مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی کمتر از ۵

ب) $A=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ **و** $B=\{۳,۴,۵,۶,...\}$

ج) $A=\{۱,-۱,۲,-۲\}$ **و** $B=\{-۲,-۱,۲,-۱,۱\}$

د) $A=\{۰/۵\times ۰/۲, ۰/۵\times ۰/۴\}$ **و** $B=\{۰/۱, ۰/۲\}$

پاسخ

الف) اگر مجموعه‌ی اعداد اول زوج را A بنامیم و مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی کمتر از ۵ را B بنامیم، داریم:

$A=\{۲\}$

$B=\{۲,۴\}$

پس: $A\neq B$.

ب) همان طور که می‌بینید $۱,۲\in A$ اما $۱,۲\notin B$. پس: $A\neq B$.

ج) اول مجموعه‌ها را مرتب می‌نویسیم و اعضای تکراری را حذف می‌کنیم.

$A=\{-۲,-۱,۱,۲\}$

$B=\{-۲,-۱,۱,۲\}$

لذا A و B برابرند.

د)

$$\begin{matrix} ۰/۲\times ۰/۵=۰/۱ \\ ۰/۵\times ۰/۴=۰/۲ \end{matrix} \rightarrow A=\{۰/۱,۰/۲\} \qquad B=\{۰/۱,۰/۲\}$$

پس: $A=B$.

مثال

اگر $\{x-۲,\{۴\}\}=\{\{۲z,y-۵\},۹\}$ مقادیر x و y و z را بیابید.

پاسخ

باید اعضای دو طرف یکسان باشند. بنابراین:

$$x-۲=۹ \rightarrow x=۱۱$$

$$\{۴\}=\{۴,۴\}=\{۲z, y-۵\} \rightarrow \begin{cases} ۲z=۴ \rightarrow z=۲ \\ y-۵=۴ \rightarrow y=۹ \end{cases}$$

$\{۴,۴\}=\{۴\}$ نشان دهنده بی اثر بودن عضو تکراری در مجموعه‌ها است.

مثال

در هر یک از موارد زیر، زیرمجموعه‌های A و B برابرند. مجهولات موجود در مجموعه‌ها را تعیین کنید.

الف) $\mathbf{A=\{m+۲n,۵,۳\}\ ,\ B=\{۱-۲n,۵,-۳\}}$

ب) $\mathbf{A=\{x-۱,۵\}\ ,\ B=\{۴,y+۳\}}$

پاسخ

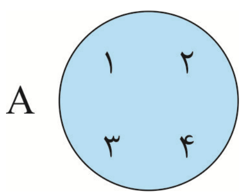
الف) باید اعضای A و B برابر باشند. پس:

$$۱-۲n=۳ \rightarrow ۲n=-۲ \rightarrow n=-۱$$
$$m+۲n=-۳ \rightarrow m+۲(-۱)=-۳ \rightarrow m-۲=-۳ \rightarrow m=-۱$$

ب) باید اعضای A و B باهم یکسان باشند. پس:

$$x-۱=۴ \rightarrow x=۵$$
$$y+۳=۵ \rightarrow y=۲$$

نمایش هندسی مجموعه‌ها (استفاده از نمودار ون): مجموعه را می‌توان با استفاده از اشکال هندسی و منحنی‌های بسته نمایش داد. به عنوان مثال $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم. به این نوع نمایش نمودار ون گفته می‌شود.



مجموعه تهی: به مجموعه‌ای گفته می‌شود که هیچ عضوی ندارد.

مثال

اگر مجموعه‌ی اعداد دو رقمی و زوج که اول باشند را E بنامیم، این مجموعه چند عضو دارد؟

پاسخ

این مجموعه عضوی ندارد. چرا که اعداد زوج غیر از خود ۲ مرکب هستند و هیچ یک اول نیستند. پس هیچ عددی را نمی‌توان یافت که زوج، اول و دو رقمی باشد. لذا عضوی برای مجموعه E نمی‌توان یافت. بنابراین مجموعه E تهی است.

مجموعه تهی را با $\{\}$ و یا $\varnothing$ نمایش می‌دهند.

زیر مجموعه‌ها: مجموعه‌ی B را زیر مجموعه‌ی A می‌نامیم، هرگاه هر عضو از B در مجموعه‌ی A باشد که آن را با نماد $B \subset A$ نشان می‌دهیم.

اما اگر B زیر مجموعه‌ی A نباشد، می‌نویسیم $B \not\subset A$.

مثال

آیا رابطه‌ی $\{a,b,d\} \subseteq \{a,b,c,e\}$ برقرار است؟

پاسخ

خیر. چون $d \in \{a,b,d\}$ اما $d \notin \{a,b,c,e\}$.

مثال

زیر مجموعه‌های $A = \{a,b,c\}$ را بنویسید.

پاسخ

$\varnothing, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$

$\varnothing$ زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است. هر مجموعه‌ای مانند A زیر مجموعه‌ی خودش است. به این دو زیرمجموعه اصطلاحا زیر مجموعه‌های بدیهی A گویند.

مثال

اگر $A = \{۱, ۴, ۹, \ldots\}$ باشد. آیا مجموعه‌ی $B = \{۲۵, ۳۰, ۳۶\}$ می‌تواند زیرمجموعه A باشد؟

پاسخ

خیر. A مجذور اعداد طبیعی است، ولی یکی از اعضای B مجذور نمی‌باشد. پس $B \not\subset A$.

مثال

اگر $A = \{a, \{a\}\}$ و $B = \{\{a, \{a\}\}\}$ کدام رابطه درست و کدام نادرست است؟

الف) $A \subset B$ ب) $B \subset A$ ج) $A \in B$

پاسخ

الف) نادرست است.

ب) نادرست است.

ج) درست است. زیرا:

$$A=\{a,\{a\}\}$$

$$B=\{\underbrace{\{a,\{a\}\}}_{A}\}=\{A\}\Rightarrow A\in B$$

مثال

زیر مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ را بنویسید.

پاسخ

مجموعه $\{\varnothing\}$ دو زیر مجموعه دارد که $\varnothing,\{\varnothing\}$ است.

مثال

از روابط زیر کدام یک درست و کدام نادرست است؟

الف) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$

ب) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

ج) $\varnothing\subset\varnothing$

د) $\varnothing\in\varnothing$

پاسخ

همگی به جز «د» درست هستند.

الف) تهی زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

ب) $\varnothing$ عضوی از مجموعه‌ی $\{\varnothing\}$ است. پس «ب» هم درست است.

ج) درست است. چون تهی زیر مجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است و خود مجموعه نیز، زیر مجموعه‌ی خودش است. پس: $\varnothing\subset\varnothing$.

د) نادرست است. چون مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد.

مثال

اگر $A=\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ کدام گزینه درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{۱,۲\}\subset A$

ب) $\{۱\}\in A$

ج) $\{\{۱,۲\}\}\subset A$

د) $\varnothing\subset A$

پاسخ

الف) درست. اگر آکولاد را از عبارت $\{۱,۲\}$ برداریم، باید این اعداد به‌طور مستقیم داخل مجموعه‌ی A دیده شوند که این‌طور است.

ب) نادرست. چون $\{۱\} \subset A$ است، نه عضو A

ج) درست. مانند «الف»

د) درست

مثال

تعداد زیرمجموعه‌های $A = \{\{۱,۲,۳,۴,۵\}\}$ چند تا است؟

پاسخ

این مجموعه تنها یک عضو دارد و آن $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است. بنابراین زیرمجموعه‌های A عبارتند از: مجموعه تهی و خود مجموعه.

$$\varnothing, \{\{۱,۲,۳,۴,۵\}\} = A$$

نمایش مجموعه‌های اعداد: روش دیگر برای نشان دادن مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است. به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی $E = \{۲,۴,۶,\ldots\}$ را در نظر بگیرید. اعضای این مجموعه، چون زوج بوده، همگی مضرب ۲ هستند، یعنی به‌صورت $۲k$ که $k \in \mathbb{N}$. پس می‌توان نوشت:

$$E = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مثال

اعداد طبیعی فرد:

$$O = \{۱,۳,۵,۷,\ldots\}$$

$$O = \{۲k-۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مثال

مجموعه اعداد طبیعی بین ۶ و ۱۱ :

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid ۶ < x < ۱۱\} = \{x \in \mathbb{N} \mid ۷ \le x \le ۱۰\} = \{۷,۸,۹,۱۰\}$$

مثال

هر یک از مجموعه‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید و عضوهای آن را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج کمتر از ۱۵

ب) مجموعه‌ی اعداد صحیح بین ۶- و ۶

ج) مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح بین $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۶}{۵}$

د) مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی

پاسخ

الف)

$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴\} \rightarrow A=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}, ۱\le k\le ۷\}$

ب)

$B=\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵\} \rightarrow B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۶<x<۶\}$

ج)

$C=\{۱\} \rightarrow C=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, \frac{۱}{۵}<x<\frac{۶}{۵}\}$

د) مجموعه‌ی اعداد اول را با P نشان می‌دهیم:

$D=\{۲,۳,۵,۷\} \rightarrow B=\{x \mid x\in P, x<۱۰\}$

مثال

مجموعه‌ی $\{x^۲ \mid x\in\mathbb{N}, x>۳\}$ را با نوشتن اعضایش مشخص کنید.

پاسخ

$x^۲$ یعنی هر عددی را به توان ۲ برسانیم، با این شرط که عددی که می‌خواهیم به توان ۲ برسانیم، طبیعی و از ۳ بزرگ‌تر باشد.

$\{۴^۲,۵^۲,۶^۲,\dots\}=\{۱۶,۲۵,۳۶,\dots\}$

مثال

مجموعه‌ی $\{\frac{۱}{x} \mid x\in\mathbb{Z}, x<-۲\}$ را مشخص کنید.

پاسخ

اعداد کوچک‌تر از ۲- و صحیح مجموعه‌ی اعداد $\{-۳,-۴,-۵,\dots\}$ می‌باشند که باید معکوس کنیم.

$\{-\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۵},\dots\}$

مثال

مجموعه‌ی $A=\{۳,۶,۹,۱۲,\dots\}$ را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

پاسخ

$A=\{۳x \mid x\in\mathbb{N}\}$

مثال

مجموعه‌ی $B=\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},...\}$ را با علائم ریاضی بنویسید.

پاسخ

$$B=\{\frac{۱}{x}|x\in\mathbb{N}\}$$

مثال

کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\frac{۱}{۹}\in\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},...\}$

ب) $۵۶\notin\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$

پاسخ

الف) درست است. مجموعه‌ی «الف» وارون اعداد طبیعی می‌باشد و چون ۹ عددی طبیعی است، پس $\frac{۱}{۹}$ عضو مجموعه‌ی «الف» می‌باشد.

ب) درست است. چون مجموعه‌ی «ب» مضرب‌های ۳ می‌باشد و ۵۶ به شکل $۳k$ نیست و یا این‌که مضرب ۳ نیست.

مثال

اگر $M=\{r,s,t\}$، کدام یک از احکام زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) $r\in M$

ب) $r\subseteq M$

پ) $\{r\}\in M$

ت) $\{r\}\subseteq M$

پاسخ

الف) درست.

ب) نادرست. زیرا r زیر مجموعه‌یM نیست، بلکه عضوM است.

پ) نادرست. زیرا علامت $\in$ باید یک شی یا عضو را به مجموعه مربوط کند ولی $\{r\}$ زیر مجموعه‌یM است، نه عضوM.

ت) درست.

مثال

اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}|۲x=۶\}$ آیا $A=۳$؟

پاسخ

A مجموعه‌ای است تنها دارای عضو ۳ ، چون جواب $۲x=۶$ برابر است با $x=۳$، بنابراین $A=\{۳\}$. ۳ عضو A است، نه مساوی A.

نکته

توجه کنید که عضو a و مجموعه‌ی $\{a\}$ متفاوت هستند و آن‌ها را یکی نگیریم.

مثال

اگر $A=\{x|x\in\mathbb{Z},-۷<x<۹\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{Z},x>-۱۱\}$ باشد، کدام یک درست است؟

$A\subset B$ $\qquad$ $B\subset A$

پاسخ

اعضای A و B را می‌نویسیم:

$A=\{-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots,۸\}$

$B=\{-۱۰,-۹,\ldots,-۶,-۵,\ldots,۹,\ldots\}$

همان‌طور که می‌بینید تمام اعضای مجموعه‌ی A در B هستند. پس $A\subset B$.

مثال

اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$A=\{۳k-۱|k\in\mathbb{N},-۳\le k<۵\}$

$B=\{\frac{x^۲}{۱+x^۲}|x\in\mathbb{Z},-۴\le x<۲\}$

پاسخ

در فرمول $۳k-۱$ به جای k اعداد $۴,۳,۲,۱$ (اعداد طبیعی بین ۳- و ۵) را قرار می‌دهیم:

$A=\{۲,۵,۸,۱۱\}$

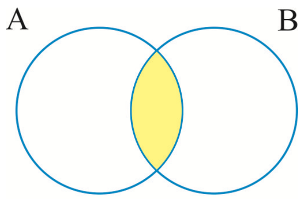
به جای x اعداد $-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱$ را قرار می‌دهیم:

$B=\{\frac{۱۶}{۱۷},\frac{۹}{۱۰},\frac{۴}{۵},\frac{۱}{۲},۰\}$

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اشتراک: اشتراک دو مجموعه‌ی A و B مجموعه‌ای است که به‌صورت $A\cap B$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از: مجموعه‌ی تمام اعضایی که هم در A و هم در B قرار داشته باشند (در A و B مشترک باشند).

استفاده از نمودار ون:



$A\cap B$

با نماد ریاضی: $A\cap B=\{x|x\in A, x\in B\}$

مثال

اگر $A=\{-۱,۲,۰,۴\}$ و $B=\{۰,۲,۴\}$ و $C=\{۳,-۱,۶\}$ مجموعه‌های $A\cap B$، $B\cap C$ و $A\cap C$ را مشخص کنید.

پاسخ

عضوهای مشترک مجموعه‌ها را در هر حالت می‌نویسیم:

$A\cap B=\{-۱,۲,۰,۴\}\cap\{۰,۲,۴\}=\{۰,۲,۴\}$

$B\cap C=\{۰,۲,۴\}\cap\{۳,-۱,۶\}=\varnothing$

$A\cap C=\{-۱,۲,۰,۴\}\cap\{۳,-۱,۶\}=\{-۱\}$

نکته

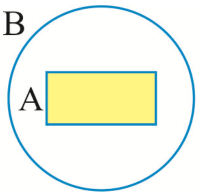
اشتراک هر مجموعه مانند A با خودش، برابر خود A است. $A\cap A=A$.

نکته

اشتراک هر مجموعه با تهی، برابر تهی است. $A\cap\varnothing=\varnothing$.

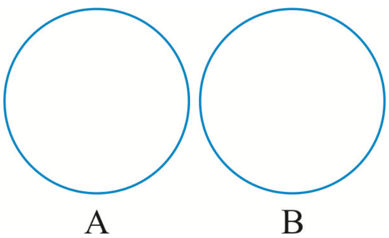
نکته

اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A\cap B=A$.



$A\subseteq B\rightarrow A\cap B=A$

دو مجموعه جدا از هم: دو مجموعه را مجزا و یا جدا از هم می‌نامند، هرگاه $A\cap B=\varnothing$. یعنی هیچ عضو مشترکی ندارند.



$A\cap B=\varnothing$

برای مثال: اشتراک مجموعه‌ی اعداد زوج و فرد، تهی است.

مثال

اگر $E\cap B=\varnothing$ باشد، حاصل $A\cap B\cap C\cap D\cap E\cap F$ را بیابید.

پاسخ

در حل سؤال از این نکته استفاده کردیم که برای هر دو مجموعه مانند B و A:

$$A\cap B=B\cap A$$

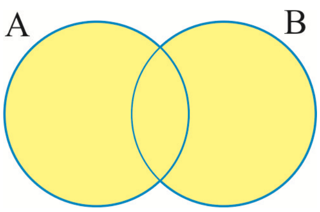
یعنی می‌توان اعضا را جابجا کرد.

همچنین اشتراک تهی با هر مجموعه‌ای، تهی است.

$$E\cap B=\varnothing\Rightarrow A\cap\underbrace{B\cap C\cap D\cap E}_{\varnothing}\cap F=\varnothing$$

اجتماع: اجتماع دو مجموعه A و B را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم و عبارت است از مجموعه تمام اعضایی که در A یا B و یا هر دو هستند.

استفاده از نمودار ون:



با نماد ریاضی:

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

مثال

اگر $A=\{-۱,۲,۰,۴\}$ و $B=\{۵,۰,۶\}$ و $C=\{۴,-۱,۶\}$ مجموعه‌های $A\cup B$ و $A\cup C$ را مشخص کنید.

پاسخ

همه‌ی اعضای مجموعه‌ها را کنار هم می‌نویسیم و تکراری‌ها را حذف می‌کنیم:

$$A\cup B=\{-۱,۲,۰,۴,۵,۰,۶\}=\{-۱,۲,۰,۰,۴,۵,۶\}=\{-۱,۲,۰,۴,۵,۶\}$$

$$A\cup C=\{-۱,۲,۰,۴,۴,-۱,۶\}=\{-۱,-۱,۰,۲,۴,۴,۶\}=\{-۱,۰,۲,۴,۶\}$$

نکته

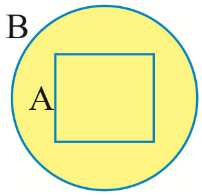
اجتماع هر مجموعه مانند A با خودش، برابر خود A است. $A\cup A=A$

نکته

اجتماع هر مجموعه با تهی، برابر خود مجموعه است. $A\cup\varnothing=A$

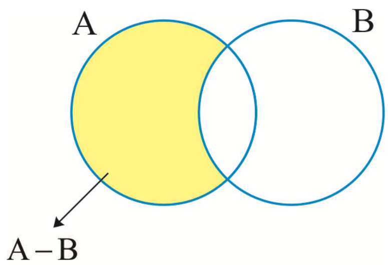
نکته

اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A\cup B=B$.



$A\subseteq B\to A\cup B=B$

تفاضل: تفاضل دو مجموعه A و B را با $A-B$ نشان می‌دهند و عبارت است از مجموعه اعضایی کـه در A هســتند و در B نیستند.



$A-B=\{x\,|\,x\in A, x\notin B\}$

مثال

اگر $\mathbf{A=\{a,b,c,d\}}$ و $\mathbf{B=\{c,d,e,f\}}$ اعضای مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) $\mathbf{A-B}$ ب) $\mathbf{(A\cup B)-(A\cap B)}$

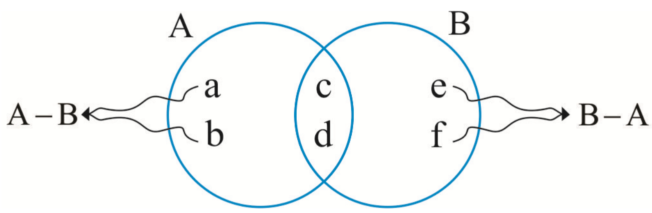
ج) $\mathbf{(A-B)\cup(B-A)}$

پاسخ

الف)

$A-B=\{a,b,c,d\}-\{c,d,e,f\}=\{a,b\}$

دو عضو a و b در A هستند ولی در B نیستند.



ب)

$$\left.\begin{array}{l}A\bigcup B=\{a,b,c,d,c,d,e,f\}=\{a,b,c,d,e,f\}\\ A\bigcap B=\{c,d\}\end{array}\right\}\Rightarrow (A\bigcup B)-(A\bigcap B)=\{a,b,c,d,e,f\}-\{c,d\}=\{a,b,e,f\}$$

ج) در ابتدا $B-A$ را مانند روش قبل محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}A-B=\{a,b,c,d\}-\{c,d,e,f\}=\{a,b\}\\ B-A=\{c,d,e,f\}-\{a,b,c,d\}=\{e,f\}\end{array}\right\}\Rightarrow (A-B)\bigcup(B-A)=\{a,b\}\bigcup\{e,f\}=\{a,b,e,f\}$$

مثال

اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۵\}$ مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

الف) $\mathbf{B\bigcap(A-B)}$

ب) $\mathbf{(A-B)\bigcup(A\bigcap B)}$

پاسخ

الف)

$$A-B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۵\}=\{۱,۲,۴\}$$
$$\Rightarrow B\bigcap(A-B)=\{۳,۵\}\bigcap\{۱,۲,۴\}=\varnothing$$

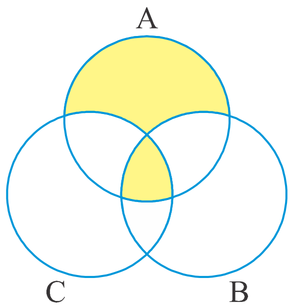
ب)

$$\left.\begin{array}{l}A-B=\{۱,۲,۴\}\\ A\bigcap B=\{۳,۵\}\end{array}\right\}\Rightarrow (A-B)\bigcup(A\bigcap B)=\{۱,۲,۴\}\bigcup\{۳,۵\}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}=A$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که تساوی $(A-B)\bigcup(A\bigcap B)=A$ برقرار است.

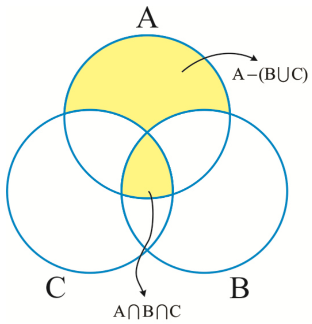
مثال

عبارتی که نشان دهنده‌ی قسمت رنگ شده است را بیابید.



پاسخ

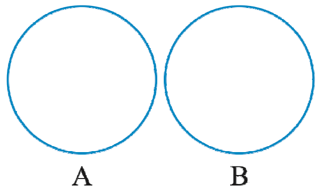
با دقت در شکل، قسمت رنگی برابر است با: $\mathbf{[A-(B\bigcup C)]\bigcup(A\bigcap B\bigcap C)}$.



مثال

اگر $A-B=A$ باشد، آن‌گاه حاصل $B-[A-(B-A)]$ را بیابید.

پاسخ



$A-B=A\Rightarrow$ A و B جدا از هم هستند

$$\Rightarrow B-(\underbrace{A-(\underbrace{B-A}_{B})}_{A})=B-A=B$$

مثال

فرض کنیم داشته باشیم $A=\{۱,m,۳\}$ و $B=\{n\,|\,n\in\mathbb{N},۲\leq n<۷\}$ و $C=\{۴,۵,۶\}$ مقدار m را طوری بیابید که داشته باشیم: $C=B-A$.

پاسخ

بنابر تعریف B داریم:

$$B=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$$

پس:

$$B-A=\{۲,۳,۴,۵,۶\}-\{۱,m,۳\}$$

از طرفی $B-A=C$. پس:

$$\{۲,۳,۴,۵,۶\}-\{۱,m,۳\}=C\Rightarrow\{۲,۳,۴,۵,۶\}-\{۱,m,۳\}=\{۴,۵,۶\}$$

بنابراین برای آن‌که تساوی برقرار شود، باید $m=۲$ باشد.

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

برای محاسبه احتمال هر پیشامد از دستور کلی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{احتمال رخ دادن هر پیشامد}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{عداد همه حالت‌های ممکن}}$$

اگر مجموعه شامل همه‌ی حالت‌های ممکن را با نماد S، مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را با A و احتمال رخ دادن پیشامد را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، دستور بالا به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

که $n(A)$ تعداد اعضای مجموعه‌ی A و $n(S)$ تعداد اعضای مجموعه‌ی S است.

مثال

یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که عدد ظاهر شده:

الف) مضرب ۵ باشد. ب) کوچک‌تر از ۵ باشد.

ج) عدد اول دو رقمی باشد.

پاسخ

مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ را فضای نمونه گویند.

الف) تنها عددی که مضرب ۵ باشد، عدد ۵ است.

مجموعه‌ی A یک عضوی است. پس $n(A)=۱$ و S، ۶ عضو دارد. پس $n(S)=۶$.

$$A=\{۵\}\to P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

به A پیشامد تصادفی گویند.

ب) اعداد کوچک‌تر از ۵ که در S باشند، $\{۱,۲,۳,۴\}$ هستند. پس $B=\{۱,۲,۳,۴\}$. توجه داشته باشید که پیشامدها، زیرمجموعه‌ی فضای نمونه‌ی S هستند.

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

ج) اعداد روی تاس $۱,۲,۳,۴,۵,۶$ هستند که هیچ یک دو رقمی نیستند. به عبارت دیگر احتمال وقوع چنین حالتی صفر است و یا این‌که می‌گوییم محال است.

$$C=\varnothing\to P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۰}{۶}=۰$$

مثال

در ظرفی ۱۵ کارت با شماره‌های ۱،۲،۳،۴،...،۱۵ قرار دارد. یک کارت به صورت تصادفی از ظرف خارج می‌کنیم. مجموعه‌ی S را نوشته و احتمال آن را بیابید که عدد روی کارت:

الف) دو رقمی باشد. ب) عدد اول فرد باشد.

پاسخ

فضای نمونه‌ی S اعداد ۱،۲،۳،۴،...،۱۵ است. لذا $S=\{۱,۲,۳,\dots,۱۵\}$

الف) اعداد دو رقمی این فضا عبارتند از:

$$A=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵\}$$

پس:

$$\begin{matrix} n(A)=۶ \\ n(S)=۱۵ \end{matrix}\to P(A)=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

ب) اعداد اول فرد بین ۱ تا ۱۵ عبارتند از:

$$C=\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳\}\rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

مثال

اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم، فضای پیشامد $S=\{\text{رو , پشت}\}$ خواهد بود که آن را به اختصار با $S=\{\text{ر , پ}\}$ نشان می‌دهیم.

مثال

فرض کنید دو سکه را پرتاب کرده‌ایم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را بیابید:

الف) هر دو سکه رو بیاید. ب) فقط یک سکه پشت بیاید.

پاسخ

$$S=\{\underset{\text{سکه دوم}}{\overset{\text{سکه اول}}{(\text{ر},\text{ر})}},\underset{\text{سکه دوم}}{\overset{\text{سکه اول}}{(\text{پ},\text{ر})}},\underset{\text{سکه دوم}}{\overset{\text{سکه اول}}{(\text{ر},\text{پ})}},\underset{\text{سکه دوم}}{\overset{\text{سکه اول}}{(\text{پ},\text{پ})}}\}$$

$$\Rightarrow n(S)=۴$$

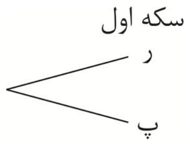
الف) حالتی که هر دو سکه رو آمده است:

$$A=\{(\text{ر},\text{ر})\}\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$$

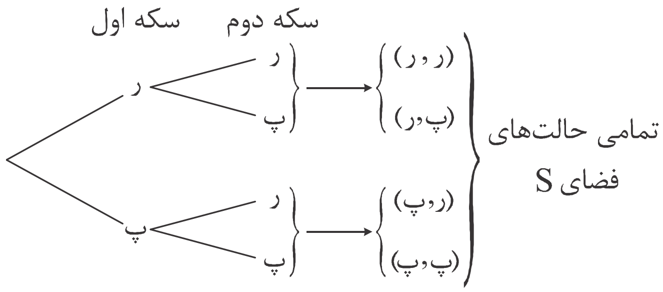
ب) حالت‌هایی که فقط یک سکه پشت بیاید.

$$B=\{(\text{پ , ر}),(\text{ر , پ})\}\rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

حل به روش دیگر (استفاده از نمودار درختی): اگر حالت هر سکه را با شکل زیر نشان دهیم، داریم:



بنابراین با استفاده از نمودار بالا داریم:



این روش برای در نظر گرفتن تمامی حالات ممکن بسیار کارآمد است.

مثال

یک تاس را پرتاب کرده و یک سکه را می‌اندازیم:

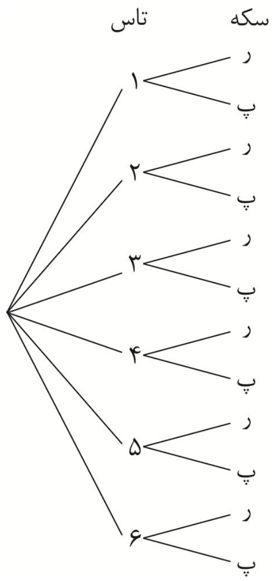
الف) مجموعه‌ی S را بنویسید.

ب) احتمال آن‌که سکه رو و تاس عدد زوج ظاهر شود، چقدر است؟

ج) احتمال آن‌که سکه پشت بیاید چقدر است؟

پاسخ

مانند مثال قبل نمودار درختی فضای نمونه را رسم می‌کنیم.



الف)

$$S=\{(\text{۱,ر}),(\text{۱,پ}),(\text{۲,ر}),(\text{۲,پ}),(\text{۳,ر}),(\text{۳,پ}),(\text{۴,ر}),(\text{۴,پ}),(\text{۵,ر}),(\text{۵,پ}),(\text{۶,ر}),(\text{۶,پ})\}$$

$$\Rightarrow n(S)=\text{۱۲}$$

ب)

$$A=\{(\text{۲,ر}),(\text{۴,ر}),(\text{۶,ر})\}$$

$$n(A)=\text{۳}\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{۳}}{\text{۱۲}}=\frac{\text{۱}}{\text{۴}}$$

ج)

$$B=\{(\text{۱,پ}),(\text{۲,پ}),(\text{۳,پ}),(\text{۴,پ}),(\text{۵,پ}),(\text{۶,پ})\}$$

$$n(B)=\text{۶}\rightarrow P(B)=\frac{\text{۶}}{\text{۱۲}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

مثال

تمام ترکیبات دو رقمی مجموعه‌ی اعداد $\{۱,۲,۳\}$ را روی کارت‌های مختلف نوشته (هر ترکیب روی یک کارت) و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به طور تصادفی برمی‌داریم. احتمال آن‌که روی این کارت عدد ۲ باشد، چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه برابر است با:

$$S=\{۱۲,۱۳,۲۱,۲۳,۳۱,۳۲\}$$

پیشامد مطلوب را A بنامیم:

$$A=\{۱۲,۲۱,۲۳,۳۲\}$$

پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال

از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

پاسخ

$$S=\{۱,۲,\ldots,۱۰۰۰\}\rightarrow n(S)=۱۰۰۰$$

فرض کنیم A مجموعه اعداد بین ۱ تا ۱۰۰۰ باشد که بر ۳ بخش‌پذیر هستند. پس:

$$A=\{۳k \mid ۱\leq k\leq ۳۳۳\}\rightarrow n(A)=۳۳۳$$

$$P(A)=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$$

روش دیگر این‌که تعداد اعداد بین ۱ تا ۱۰۰۰ که بر ۳ بخش‌پذیر باشند، برابر است با:

$$\begin{array}{r|l} ۱۰۰۰ & ۳ \\ \hline -۹۹۹ & ۳۳۳ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۳ بین ۱ تا ۱۰۰۰

مثال

کیسه‌ای شامل ۵۲ مهره در ۴ رنگ آبی، قرمز، سفید و زرد است و تمام مهره‌های همرنگ از ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند. یک مهره به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که مهره ۳ زرد یا ۶ سفید باشد، چقدر است؟

پاسخ

فرض کنید «ز» زرد و «س» سفید را نشان دهند. در این صورت $۳\cap$ز پیشامد ۳ زرد و $۶\cap$س پیشامد ۶ سفید را نشان می‌دهند. داریم:

$$n(S)=۵۲$$

$$n(۳\cap \text{ز})=۱\Rightarrow P(۳\cap \text{ز})=\frac{۱}{۵۲}$$

$$n(۶\cap \text{س})=۱\Rightarrow P(۶\cap \text{س})=\frac{۱}{۵۲}$$

پس:

$$P(\underbrace{۳\cap \text{ز} \quad \text{یا} \quad ۶\cap \text{س}}_{\text{اجتماع دو پیشامد}})=P(۳\cap \text{ز})+P(۶\cap \text{س})=\frac{۱}{۵۲}+\frac{۱}{۵۲}=\frac{۱}{۲۶}$$

ویژه‌ی دانش آموزان علاقه‌مند

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با ۲^n.

مثال

یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی، چند زیرمجموعه دارد؟

پاسخ

$$۲^n\Rightarrow ۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

مثال

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ای برابر $۴^{۳n-۱}$ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

پاسخ

$$۴^{۳n-۱}=(۲^۲)^{۳n-۱}=۲^{۶n-۲}$$

پس تعداد اعضای این مجموعه برابر است با: $۶n-۲$.

مثال

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۲۸ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۲۴ عضوی است؟

پاسخ

$$۲^{۲۸} \div ۲^{۲۴} = ۲^{۴} = ۱۶$$

مثال

اگر به تعداد عضوهای مجموعه‌ای ۲ عضو اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ زیرمجموعه اضافه می‌شود. ایـن مجموعه چند عضو دارد؟

پاسخ

$$۲^{n+۲} - ۲^{n} = ۴۸$$
$$۲^{n}(۲^{۲} - ۱) = ۴۸ \Rightarrow ۲^{n} = ۱۶ \rightarrow n = ۴$$

فاکتوریل: برای سهولت در محاسبات، حاصل ضرب اعداد ۱ تا n را با نماد $n!$ نمایش می‌دهند و آن را n فاکتوریل می-خوانیم. به عنوان مثال ۵ فاکتوریل عبارت است از: $۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱$.

با استفاده از مفهوم بالا برای محاسبه‌ی تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی از دستور زیر استفاده می‌گردد:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ چند است؟

پاسخ

در این‌جا $r = ۴$ و $n = ۵$. پس $\frac{۵!}{۴!(۵-۴)!} = \frac{۵!}{۴!۱!} = \frac{۵\times۴!}{۴!} = ۵$

نکته

$۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ است.

نکته

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی فاقد k عضو معین برابر است با: $\frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!}$

مثال

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه‌ی $\{a, b, c, d, e\}$ که فاقد a, d باشند، چند است؟

پاسخ

در این مثال با توجه به فرمول بالا داریم:

$$\left.\begin{matrix} n=۵ \\ r=۲ \\ k=۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!} \xrightarrow{\text{با جایگذاری}} \frac{(۵-۲)!}{۲!(۵-۲-۲)!} = \frac{۳!}{۲!۱!} = \frac{۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۱} = ۳$$

نکته

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی شامل k عضو معین برابر است با:

$$\frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}$$

مثال

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه $\{a,b,c,d,e\}$ شامل a,d چند تا است؟

پاسخ

$$\left.\begin{matrix} n=۵ \\ r=۲ \\ k=۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!} \xrightarrow{\text{با جایگذاری}} \frac{(۵-۲)!}{(۲-۲)!(۵-۲)!} = \frac{۳!}{۳!} = ۱$$

نکته

تعداد زیرمجموعه‌های شامل یا فاقد k عضو از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: ۲^{n-k}.

نکته

تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی و زوج عضوی یک مجموعه برابر است با: $۲^{n-۱}$.

مثال

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $x+۵$ عضوی چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $x+۳$ عضوی است؟

پاسخ

$$۲^{x+۵} \div ۲^{x+۳} = ۲^{۲} = ۴$$

مثال

مجموعه‌ی $K=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند زیرمجموعه‌ی حداقل ۳ عضوی دارد؟

پاسخ

بنا به‌صورت سؤال چون گفته شده حداقل ۳ عضوی یعنی مجموع تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی ، ۴ عضوی ، ۵ عضوی و ۶ عضوی را می‌خواهد. پس:

$$\frac{۶!}{۳!(۶-۳)!}+\frac{۶!}{۴!(۶-۴)!}+\frac{۶!}{۵!(۶-۵)!}+\frac{۶!}{۶!(۶-۶)!}=۴۲$$

تعمیم اجتماع و اشتراک

n مجموعه‌ی دلخواه $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ را در نظر بگیرید:

اجتماع این مجموعه‌ها برابر است با: $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n$

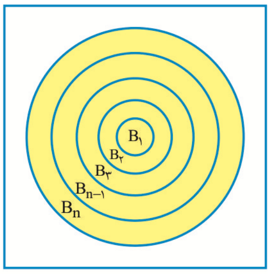
اشتراک این مجموعه‌ها برابر است با: $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \cap A_۲ \cap \dots \cap A_n$

مثال

اگر $B_۱, B_۲, \dots, B_n$، n زیرمجموعه‌ی M باشند، به طوری که $B_۱ \subset B_۲ \subset \dots \subset B_n$ حاصل $(B_۲ - B_۱) \cup (B_۳ - B_۲) \cup \dots \cup (B_n - B_{n-۱})$ را به دست آورید.

پاسخ

با توجه به شکل واضح است که $(B_۲ - B_۱) \cup (B_۳ - B_۲) \cup \dots \cup (B_n - B_{n-۱}) = B_n - B_۱$.



M

مثال

اگر $A_۱ = \{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ و $A_۲ = \{۲, ۳, \dots, ۱۱\}$ و $A_۳ = \{۳, ۴, \dots, ۱۲\}$ و ... آن‌گاه مجموعه‌ی $A_۳ \cap A_۴ \cap \dots \cap A_۸$ چند عضو دارد؟

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} A_۳ = \{۳, ۴, \dots, ۱۲\} \\ A_۴ = \{۴, ۵, \dots, ۱۳\} \\ \vdots \\ A_۸ = \{۸, ۹, \dots, ۱۷\} \end{array}\right\} \Rightarrow A_۳ \cap A_۴ \cap \dots \cap A_۸ = \{۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}$$

پس این مجموعه ۵ عضو دارد.

خواص اصلی اجتماع و اشتراک

۱) $\begin{cases} A,B \subseteq A\cup B \\ A\cap B \subseteq A,B \end{cases}$

۲) $\left.\begin{matrix} A\subseteq B \\ C\subseteq D \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A\cup C \subseteq B\cup D \\ A\cap C \subseteq B\cap D \end{cases}$

۳) $\left.\begin{matrix} A\subseteq B \\ A\subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\subseteq B\cap C$

۴) $\left.\begin{matrix} A\subseteq C \\ B\subseteq C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

۵) $A\subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A\cap B = A \\ A\cup B = B \end{cases}$

۶) $\begin{cases} A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{cases}$ قوانین توزیع پذیری

۷) $\begin{cases} A\cup(A\cap B)=A \\ A\cap(A\cup B)=A \end{cases}$ قوانین جذب

مثال

اگر A و B و C سه مجموعه باشند، آیا تساوی $(A\cup B)\cap C = A\cup(B\cap C)$ همواره درست است؟

پاسخ

با توجه به قانون توزیع پذیری داریم:

$$(A\cup B)\cap C = A\cup(B\cap C) \to (A\cup B)\cap C=(A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow A\cup C = C \Rightarrow A\subset C$$

اگر $A\subset C$ تساوی برقرار است.

عدد اصلی یک مجموعه

تعداد اعضای یک مجموعه‌ی متناهی مانند A را عدد اصلی می‌گویند و با $n(A)$ نمایش می‌دهند.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی: اگر تعداد اعضای یک مجموعه محدود باشد، مجموعه را متناهی و اگر تعداد اعضایش محدود نباشد، نامتناهی می‌نامند.

ویژگی‌های مهم عدد اصلی:

الف) برای هر دو مجموعه‌ی متناهی:

$$\begin{cases} n(A-B)=n(A)-n(A\cap B) \\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \end{cases}$$

ب) برای هر سه مجموعه‌ی متناهی:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

انواع حالت‌های پیشامد:

۱) A رخ دهد و B رخ ندهد.

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

۲) A و B رخ دهد ولی C رخ ندهد.

$$n((A\cap B)-C)=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)$$

۳) A رخ دهد ولی B و C همزمان رخ ندهند.

$$n(A)-n(A\cap B\cap C)$$

۴) فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد.

$$n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$$

مثال

تعداد اعداد دو رقمی که بر ۷ بخش‌پذیرند ولی بر ۱۱ بخش‌پذیر نیستند، چقدر است؟

پاسخ

برای پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۷ باید خارج قسمت صحیح تقسیم عدد ۹۰ بر ۷ را بیابیم.

تعداد اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۷ $=[\frac{۹۰}{۷}]$

به طور مشابه:

$A\cap B$: هم بر ۷ بخش‌پذیر و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر $\rightarrow$ $A\cap B$: بر ۷۷ بخش‌پذیر

تعداد اعداد دو رقمی بخش‌پذیر بر ۷۷ $=[\frac{۹۰}{۷۷}]$

$$\begin{array}{r|l} ۹۰ & ۷ \\ -۸۴ & ۱۲ \\ \hline ۶ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} ۹۰ & ۷۷ \\ -۷۷ & ۱ \\ \hline ۱۳ & \end{array}$$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=[\frac{۹۰}{۷}]-[\frac{۹۰}{۷۷}]=۱۲-۱=۱۱$$

اصل ضرب: هرگاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق و جزء دوم به n طریق مختلف انجام شود، آن‌گاه آن عمل به $m\times n$ طریق مختلف انجام می‌شود.

مثال

چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت که از اعداد ۵,۴,۳,۲,۱,۰ تشکیل شده باشد و بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ

	یکان	دهگان	صدگان	
تعداد ارقام برای هر جایگاه:	۲	۶	۶	۵

تعداد برابر است با: ۳۶۰=۲×۶×۶×۵

مثال

با ارقام ۵,۷,۳,۹,۱ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

پاسخ

تعداد ارقام برای هر جایگاه:	۱	۲	۳	۴	۵

پس تعداد برابر است با: ۱۲۰=۱×۲×۳×۴×۵

فصل دوم: عددهای حقیقی

درس اول: عددهای گویا

یادآوری:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,\dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$

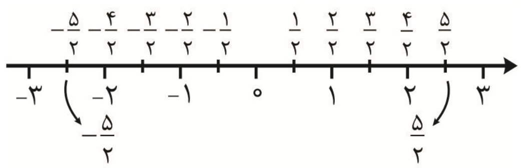
نمایش اعداد گویا روی محور اعداد: هر عدد گویا را می‌توانیم روی محور اعداد نشان دهیم.

مثال

$\frac{۵}{۲}$ و $-\frac{۵}{۲}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

پاسخ

هر کدام از فاصله‌های روی محور را دو قسمت می‌کنیم.

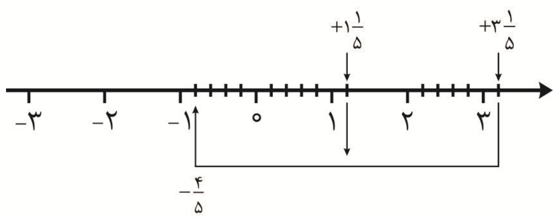


مثال

قرینه‌ی عدد گویای $+۳\frac{۱}{۵}$ را نسبت به عدد گویای $+۱\frac{۱}{۵}$ مشخص کنید.

پاسخ

هر واحد را ۵ قسمت می‌کنیم.



$$[(+۱\frac{۱}{۵})\times ۲]-[+۳\frac{۱}{۵}]=-\frac{۴}{۵}$$

مقایسه اعداد گویا: برای مقایسه‌ی دو عدد گویا از روش هم مخرج کردن استفاده می‌کنیم. یعنی مخرج‌های دو عدد گویا را یکسان می‌کنیم. سپس با مقایسه‌ی صورت‌ها می‌توان تعیین کرد که کدام یک بزرگ‌تر است.

مثال

اعداد $-\frac{۲}{۳},-\frac{۴}{۵},-۱,-۲/۳,-\frac{۵}{۴}$ را مقایسه کنید.

پاسخ

چون تمام اعداد و گزینه‌ها منفی هستند. لذا عدد هر چه به مبدأ نزدیک‌تر باشند، آن عدد بزرگ‌تر است. بنابراین:

$$-\frac{۲}{۳}>-\frac{۴}{۵}>-۱>-\frac{۵}{۴}>-۲/۳$$

مثال

از بین سه عدد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۲۴}$ و $\frac{۳}{۷}$ کدام بزرگ‌تر است؟

پاسخ

دو به دو مقایسه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{۳},\frac{۵}{۲۴}\Rightarrow\frac{۸}{۲۴}>\frac{۵}{۲۴}\\ \frac{۱}{۳},\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{۷}{۲۱}<\frac{۹}{۲۱}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۳}{۷}>\frac{۱}{۳}>\frac{۵}{۲۴}$$

تعیین عددی گویا بین دو عدد گویای دیگر: ۲ روش را ذکر می‌کنیم.

۱) ابتدا دو کسر را هم مخرج می‌کنیم. سپس با توجه به صورت دو کسر عدد مابین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم.

۲) صورت و مخرج دو کسر را باهم جمع می‌کنیم. عدد حاصله بین دو کسر خواهد بود.

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

مثال

بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۵}$ یک عدد گویا بنویسید.

پاسخ

روش اول: دو کسر را هم مخرج می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۱۰}\quad,\quad\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۰}$$

$$\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۰}<\frac{۳}{۱۰}<\frac{۴}{۱۰}<\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

روش دوم:

$$\frac{۱}{۵}<\frac{۲}{۷}<\frac{۱}{۲}$$

مثال

بین دو عدد $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ سه عدد گویا بیان کنید.

پاسخ

روش دوم واضح است. لذا به روش ۱ حل می‌کنیم. ابتدا هم مخرج می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$$

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}$$

اما می‌بینیم بین $\frac{۳}{۶}$ و $\frac{۴}{۶}$ نمی‌توانیم عدد گویایی بنویسیم. پس صورت و مخرج هر دو را در عددی ضرب می‌کنیم. در این‌جا در عدد ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۳}{۶}\times\frac{۴}{۴}=\frac{۱۲}{۲۴}\\ \frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۴}=\frac{۱۶}{۲۴}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۱۲}{۲۴}<\frac{۱۳}{۲۴}<\frac{۱۴}{۲۴}<\frac{۱۵}{۲۴}<\frac{۱۶}{۲۴}$$

به نکته‌ی زیر توجه کنید تا به علت ضرب عدد ۴ در صورت و مخرج کسر قبل پی ببرید.

نکته

بین دو کسر پشت سرهم (مانند مثال قبل) اگر بخواهیم n کسر دیگر درج کنیم، باید صورت و مخرج هر دو را در $n+۱$ ضرب کنیم. در مثال بالا $n=۳$ بود، لذا در $۳+۱=۴$ ضرب کردیم.

مثال

یک عدد گویا بین $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۶}{۷}$ بنویسید.

پاسخ

روش اول:

$$\frac{۵}{۷}<\frac{۶}{۷}\Rightarrow\frac{۵}{۷}<\frac{۵+۶}{۷+۷}<\frac{۶}{۷}\Rightarrow\frac{۵}{۷}<\frac{۱۱}{۱۴}<\frac{۶}{۷}$$

روش دوم: چون یک عدد گویا بین دو عدد گویای پشت سرهم می‌خواهیم پیدا کنیم، پس صورت و مخرج دو کسر را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۵\times۲}{۷\times۲}=\frac{۱۰}{۱۴}\\ \frac{۶\times۲}{۷\times۲}=\frac{۱۲}{۱۴}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۱۰}{۱۴}<\frac{۱۱}{۱۴}<\frac{۱۲}{۱۴}\rightarrow\frac{۵}{۷}<\frac{۱۱}{۱۴}<\frac{۶}{۷}$$

اعداد اعشاری: اعداد گویا نمایش دیگری دارند که با انجام عمل تقسیم به دست می‌آید که به آن نمایش اعشاری یک عدد می‌گویند.

مثال

اعداد زیر را به فرم اعشار تبدیل نمایید.

پاسخ

$$\frac{۱}{۲}=۱\div ۲=۰/۵$$

$$\frac{۱}{۱۰}=۱\div ۱۰=۰/۱$$

$$\frac{۲}{۳}=۲\div ۳=۰/۶۶...=۰/\overline{۶}$$

$$\frac{۷}{۶}=۷\div ۶=۰/۱۶۶...=۰/۱\overline{۶}$$

برای تبدیل یک عدد گویا به نمایش اعشاری کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم و خارج قسمت را در نظر بگیریم. از این جهت نمایش اعشاری کسرها را به دو دسته‌ی مختوم و متناوب می‌توان تقسیم کرد.

۱ـ دستهٔ اول کسرهایی هستند که به هنگام تقسیم صورت بر مخرج، به باقی‌ماندهٔ صفر می‌رسیم و عمل تقسیم در مرحله‌ای متوقف می‌شود. نمایش اعشاری این کسرها، متناهی (مختوم) نامیده می‌شوند.

مثال

نمایش اعشاری کسرهای $\frac{۳}{۵},\frac{۷}{۲۰}$ متناهی است، زیرا:

$$\begin{array}{r|l} ۳۰ & ۵ \\ \cline{2-2} -۳۰ & ۰/۶ \\ \hline ۰ & \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{۳}{۵}=۰/۶$$

$$\begin{array}{r|l} ۷۰ & ۲۰ \\ \cline{2-2} -۶۰ & ۰/۳۵ \\ \hline ۱۰۰ & \\ ۱۰۰ & \\ \hline ۰ & \end{array} \qquad \Rightarrow \frac{۷}{۲۰}=۰/۳۵$$

کسرهای تحویل‌ناپذیر $\frac{۳}{۵},\frac{۷}{۲۰}$ ، مخرج‌هایشان فقط از شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ تشکیل شده‌اند.

نکته

به طور کلی کسرهای تحویل‌ناپذیری که در تجزیهٔ مخرجشان فقط شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ ظاهر شود، دارای نمایش اعشاری متناهی می‌باشند. زیرا اگر در تجزیهٔ مخرج کسری مثلاً با عبارت $۲^m \times ۵^n$ که در آن $m > n$ مواجه شویم، می‌توانیم صورت و مخرج کسر را در ۵^{m-n} ضرب کرده و توان‌ها را مساوی کنیم و به این ترتیب در مخرج توانی از ۱۰ می‌سازیم که چنین کسرهایی را می‌توان به صورت نمایش اعشاری متناهی نوشت.

$$\frac{x}{۲^m \times ۵^n} = \frac{x \times ۵^{m-n}}{۲^m \times ۵^n \times ۵^{m-n}} = \frac{x \times ۵^{m-n}}{۲^m \times ۵^m} = \frac{x \times ۵^{m-n}}{۱۰^m}$$

مثال

نمایش اعشاری کدام یک از کسرهای زیر مختوم است؟

$$\frac{۳۱}{۴۰}, \frac{۲۱}{۶۰۰}, \frac{۱۱}{۱۴۰}, \frac{۵}{۹}$$

پاسخ

کسر $\frac{۳۱}{۴۰}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۴۰ = ۲^۳ \times ۵$ فقط از شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ تشکیل شده لذا مختوم است.

کسر $\frac{۲۱}{۶۰۰}$ برابر کسر $\frac{۷}{۲۰۰}$ است که مخرج ان $۲۰۰ = ۲^۳ \times ۵^۲$ فقط از شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ تشکیل شده لذا مختوم است.

کسر $\frac{۱۱}{۱۴۰}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۱۴۰ = ۲^۲ \times ۵ \times ۷$ علاوه بر شمارنده‌های اول ۲ و ۵ شامل شمارنده اول ۷ نیز می‌باشد. بنابراین مختوم نیست.

کسر $\frac{۵}{۹}$ تحویل‌ناپذیر و مخرج آن $۹ = ۳^۲$ شمارنده اول ۲ یا ۵ ندارد، لذا متناهی نیست.

۲ـ دستهٔ دوم کسرهایی هستند که وقتی صورتشان را بر مخرجشان تقسیم می‌کنیم هیچ‌گاه به باقی‌مانده صفر نمی‌رسیم و در خارج قسمت بعد از ممیز یک یا چند رقم به طور متناوب تکرار می‌شوند. نمایش اعشاری این کسرها را متناوب می‌نامند.

این دسته از کسرها خود به دو دسته تقسیم می‌شوند. در برخی از آن‌ها هنگام تبدیل به نمایش اعشاری بعد از ممیز تکرار ارقام آغاز می‌شود که نمایش اعشاری آن‌ها را متناوب ساده می‌نامیم. برخی دیگر نیز به هنگام تقسیم صورت بر مخرج بعد از ممیز یک یا چند رقم می‌آیند سپس تکرار ارقام آغاز می‌گردد. نمایش اعشاری این کسرها را متناوب مرکب می‌نامند.

مثال

نمایش اعشاری کدام یک از کسرهای زیر متناوب ساده و کدام یک متناوب مرکب می‌باشند؟

$$\frac{۲}{۳}, \frac{۱۶}{۴۵}, \frac{۴}{۳۳}, \frac{۷}{۶}$$

$$\begin{array}{r|l} ۲۰ & ۳ \\ \hline & ۰/۶۶... \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{۱۸} \\ ۲۰ \\ \underline{۱۸} \\ ۲ \end{array}$$

متناوب ساده $\Rightarrow \frac{۲}{۳} = ۰/\overline{۶}$

$$\begin{array}{r|l} ۱۶۰ & ۴۵ \\ \hline & ۰/۳۵۵... \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{۱۳۵} \\ ۲۵۰ \\ \underline{۲۲۵} \\ ۲۵۰ \\ \underline{۲۲۵} \\ ۲۵ \end{array}$$

متناوب مرکب $\Rightarrow \frac{۱۶}{۴۵} = ۰/۳\overline{۵}$

$$\begin{array}{r|l} ۴۰ & ۳۳ \\ \hline & ۰/۱۲۱۲... \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{۳۳} \\ ۷۰ \\ \underline{۶۶} \\ ۴۰ \\ \underline{۳۳} \\ ۷۰ \\ \underline{۶۶} \\ ۴ \end{array}$$

متناوب ساده $\Rightarrow \frac{۴}{۳۳} = ۰/\overline{۱۲}$

$$\begin{array}{r|l} ۷ & ۶ \\ \hline & ۱/۱۶۶... \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{۶} \\ ۱۰ \\ \underline{۶} \\ ۴۰ \\ \underline{۳۶} \\ ۴۰ \\ \underline{۳۶} \\ ۴ \end{array}$$

متناوب مرکب $\Rightarrow \frac{۷}{۶} = ۱/۱\overline{۶}$

نکته

برای تشخیص این که نمایش اعشاری یک کسر متناوب ساده یا مرکب است، به این ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا کسر را ساده می‌کنیم تا به یک کسر تحویل‌ناپذیر تبدیل شود. سپس مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. اگر در تجزیهٔ مخرج شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ وجود نداشته باشد و حداقل یکی از شمارنده‌های اول دیگر ظاهر شود، نمایش اعشاری کسر، متناوب ساده و اگر در تجزیهٔ مخرج شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ و حداقل یک شمارنده اول غیر از ۲ یا ۵ وجود داشته باشد، نمایش اعشاری کسر، متناوب مرکب است.

مثال

نمایش اعشاری کسرهای زیر متناهی، متناوب ساده یا مرکب است؟

$$\frac{۴}{۱۸},\frac{۲۱}{۴۵},\frac{۳۳}{۶۰}$$

پاسخ

کسر $\frac{۴}{۱۸}$ برابر $\frac{۲}{۹}$ که مخرج آن یعنی $۳^۲=۹$ فقط شمارندهٔ اول ۳ دارد. لذا نمایش اعشاری کسر $\frac{۴}{۱۸}$ متناوب ساده است.

کسر $\frac{۲۱}{۴۵}$ برابر $\frac{۷}{۱۵}$ و مخرج آن $۵\times۳=۱۵$ علاوه بر شمارندهٔ اول ۵ ، شمارندهٔ اول دیگری نیز دارد، لذا نمایش اعشاری کسر متناوب مرکب است.

کسر $\frac{۳۳}{۶۰}$ برابر $\frac{۱۱}{۲۰}$ و مخرج آن $۵\times۲^۲=۲۰$ فقط از شمارنده‌های اول ۲ یا ۵ تشکیل شده، بنابراین نمایش اعشاری کسر متناهی است.

تقدم اعمال ریاضی:

۱) داخلی‌ترین پرانتز به بیرونی‌ترین پرانتز

۲) توان

۳) ضرب و تقسیم از چپ به راست

۴) جمع و تفریق

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $-(۴\times-۳+۲-۳\times(۲+۵\div-۱))+۱$

ب) $\dfrac{۸-۵\times(۱\frac{۲}{۵})+۳}{۱۰-\frac{۳}{۷}\times(۳\frac{۱}{۲})}=$

پ) $\dfrac{۱}{۲-\dfrac{۱}{۲-\dfrac{۱}{۲-\frac{۱}{۲}}}}=$

ت) $(۲^{-۱}\div ۳^{-۱})\div(۴^{-۱}\div ۵^{-۱})=$

ث) $۱\frac{۱}{۱۰}+۲\frac{۲}{۱۰}+۳\frac{۳}{۱۰}+\cdots+۱۹\frac{۱۹}{۱۰}=$

پاسخ

الف) $-(۴\times -۳+۲-۳\times(\underbrace{۲+۵\div -۱}_{۲-۵=-۳}))+۱=-(\underbrace{۴\times -۳}_{-۱۲}+۲-\underbrace{۳\times -۳}_{+۹})+۱=$

$-(-۱۲+۲+۹)+۱=-(-۱)+۱=۱+۱=۲$

ب) $\dfrac{۸-۵\times(۱\frac{۲}{۵})+۳}{۱۰-\frac{۳}{۷}\times(۳\frac{۱}{۲})}=\dfrac{۸-\cancel{۵}(\frac{۷}{\cancel{۵}})+۳}{۱۰-\frac{۳}{\cancel{۷}}\times\frac{\cancel{۷}}{۲}}=\dfrac{۸-۷+۳}{۱۰-\frac{۳}{۲}}=\dfrac{۴}{\frac{۱۷}{۲}}=\dfrac{۸}{۱۷}$

پ) $\dfrac{۱}{۲-\dfrac{۱}{\underbrace{۲-\underbrace{\dfrac{۱}{۲-\frac{۱}{۲}}}_{\frac{۲}{۳}}}_{\frac{۴}{۳}}}}=\dfrac{۱}{۲-\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}}=\dfrac{۱}{۲-\frac{۳}{۴}}=\dfrac{۱}{\frac{۸}{۴}-\frac{۳}{۴}}=\dfrac{۱}{\frac{۵}{۴}}=\dfrac{۴}{۵}$

ت) $(۲^{-۱}\div ۳^{-۱})\div(۴^{-۱}\div ۵^{-۱})=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱})\div(\frac{۱}{۴}\times\frac{۵}{۱})=\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۶}{۵}$

ث) $(\underbrace{۱+\frac{۱}{۱۰}}_{۱\frac{۱}{۱۰}})+(\underbrace{۲+\frac{۲}{۱۰}}_{۲\frac{۲}{۱۰}})+(\underbrace{۳+\frac{۳}{۱۰}}_{۳\frac{۳}{۱۰}})+\cdots+(\underbrace{۱۹+\frac{۱۹}{۱۰}}_{۱۹\frac{۱۹}{۱۰}})\Rightarrow(۱+۲+۳+\cdots+۱۹)+\frac{۱+۲+۳+\cdots+۱۹}{۱۰}$

$=۱۹۰+۱۹=۲۰۹$

مثال

در تساوی $\frac{۸}{۵}=۱+\dfrac{۱}{۲+\frac{۱}{x}}$ مقدار x چه عددی است؟

پاسخ

از طریق گرفتن مخرج مشترک کسر $\dfrac{۱}{۲+\frac{۱}{x}}$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$\frac{۸}{۵}=۱+\dfrac{۱}{۲+\frac{۱}{x}}\Rightarrow\frac{۸}{۵}=۱+\dfrac{۱}{\frac{۲x+۱}{x}}=۱+\frac{x}{۲x+۱}\Rightarrow\frac{۸}{۵}=\frac{۲x+۱+x}{۲x+۱}\rightarrow ۱۶x+۸=۱۵x+۵\rightarrow x=-۳$

مثال

از صورت و مخرج $\frac{5}{6}$ چه عددی کم کنیم تا حاصل برابر $\frac{1}{2}$ شود؟

پاسخ

$$\frac{5-x}{6-x}=\frac{1}{2}\rightarrow 10-2x=6-x\rightarrow x=4$$

مثال

فرض کنید $A=\frac{49}{50}+\frac{50}{51}+\frac{51}{52}+\cdots+\frac{99}{100}$ باشد. مقدار $-\frac{1}{100}-\frac{1}{99}-\frac{1}{98}-\cdots-\frac{1}{50}$ را بیابید.

پاسخ

قرار می دهیم:

$$-\frac{1}{100}-\frac{1}{99}-\frac{1}{98}-\cdots-\frac{1}{50}=x$$

$$\frac{49}{50}+\cdots+\frac{99}{100}=A$$

یا

$$\frac{99}{100}+\cdots+\frac{49}{50}=A$$

$A-x$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{99}{100}-(-\frac{1}{100})+\frac{98}{99}-(-\frac{1}{99})+\cdots+\frac{49}{50}-(-\frac{1}{50})=A-x$$

$$\underbrace{(\frac{99}{100}+\frac{1}{100})}_{1}+\underbrace{(\frac{98}{99}+\frac{1}{99})}_{1}+\cdots+\underbrace{(\frac{49}{50}+\frac{1}{50})}_{1}=A-x$$

$$51\times 1=A-x\rightarrow 51=A-x\rightarrow x=A-51$$

x همان عبارت مورد سؤال است.

مثال

نسبت مجذور $\frac{2}{3}$ به مکعب آن را به دست آورید.

پاسخ

$$\frac{(\frac{2}{3})^2}{(\frac{2}{3})^3}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{27}}=\frac{3}{2}$$

نکته

$$۱)\ \frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)}=۱-\frac{۱}{n+۱}=\frac{n}{n+۱}$$

$$۲)\ \frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۳\times۵}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۲)}=\frac{۱}{۲}(\frac{n+۱}{n+۲})$$

مثال

اگر $A=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{۹\times۱۰}$ و $B=\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۳\times۵}+\cdots+\frac{۱}{۹\times۱۱}$ باشد، حاصل AB را بیابید.

پاسخ

برای حل این سؤال از نکته زیر می‌توان استفاده نمود.

$$A=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{۹\times۱۰}=۱-\frac{۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

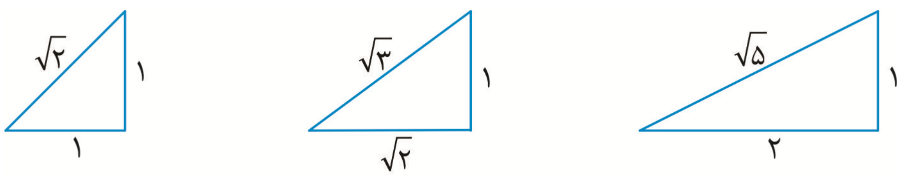
$$B=\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۳\times۵}+\cdots+\frac{۱}{۹\times۱۱}=\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۱۱})=\frac{۵}{۱۱}$$

$$A\times B=\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۱}=\frac{۹}{۲۲}$$

درس دوم: عددهای حقیقی

اعداد گنگ (اصم): عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۰}$ و π را که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها بی‌شمار و دارای دوره تناوب نیست، گنگ (اصم) می‌نامیم و با Q^c یا Q' نمایش می‌دهیم.

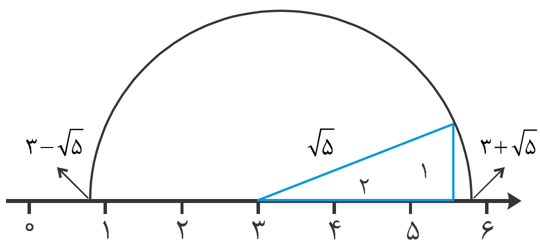
نمایش اعداد گنگ روی محور اعداد حقیقی:



مثال

$\sqrt{۵}+۳$ و $\sqrt{۵}-۳$ را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

پاسخ



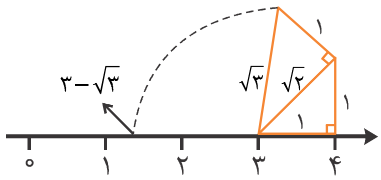
در مثال بالا چون $\sqrt{۵}+۳$ بود از عدد ۳، نقطه‌ی شروع مثلث را قرار دادیم.

مثال

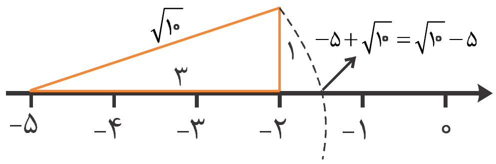
اعداد $۳-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۱۰}-۵$ را روی محور نشان دهید.

پاسخ

نقطه شروع مثلث را در ۳ قرار دادیم.

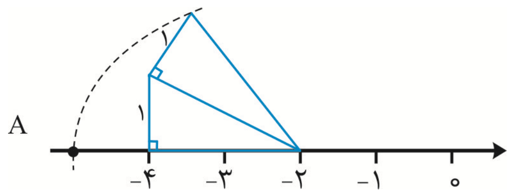


نقطه شروع مثلث را در ۵- قرار دادیم.

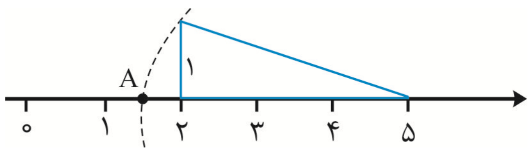


مثال

در شکل‌های زیر نقطه‌ی A نشانگر چه اعدادی است؟



(ب)



(الف)

پاسخ

در شکل الف) نقطه‌ی شروع از ۵ است و به سمت چپ رفته است. لذا عدد $۵-\sqrt{۱۰}$ را نشان می‌دهد.

در شکل ب) نقطه‌ی شروع ۲- است و آخرین وتر $\sqrt{۶}$ را نشان می‌دهد. پس عدد $-۲-\sqrt{۶}$ را نشان می‌دهد.

اعداد حقیقی: اعداد گنگ و اعداد گویا را باهم اعداد حقیقی می‌نامند و با نماد $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم که تشکیل محور اعداد حقیقی را می‌دهند.

مثال

اگر $A=\{x^x \mid x\in\mathbb{R}, x^۲-۴=۰\}$ آن‌گاه A را محاسبه کنید.

پاسخ

$$x^۲-۴=۰ \rightarrow x^۲=۴ \rightarrow x=\pm۲$$

$$A=\{۲^۲,(-۲)^{-۲}\}=\{۴,\frac{۱}{۴}\}$$

مثال

اگر $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{W}$ و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ به ترتیب مجموعه‌ی اعداد طبیعی، صحیح، حسابی، گویا و حقیقی باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی $(\mathbb{Z}\cup\mathbb{W})\cap(\mathbb{R}\cup\mathbb{N})\cap\mathbb{Q}$ را بیابید.

پاسخ

داریم: $\mathbb{N}\subset\mathbb{W}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

با جای‌گذاری در عبارت مورد سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{W}\subset\mathbb{Z}\Rightarrow\mathbb{W}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\\ \mathbb{N}\subset\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}\cup\mathbb{N}=\mathbb{R}\end{array}\right\}$$

$$(\underbrace{\mathbb{Z}\cup\mathbb{W}}_{\mathbb{Z}})\cap(\underbrace{\mathbb{R}\cup\mathbb{N}}_{\mathbb{R}})\cap\mathbb{Q}=\underbrace{\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}}_{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}=\mathbb{Z}\\ \mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\Rightarrow\mathbb{Z}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

نکته

بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

نکته

بین هر دو عدد گنگ هم بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال

بین $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۱۰}$ چند عدد گنگ پیدا کنید.

پاسخ

$(\sqrt{۵})^{۲}=۵$ و $(\sqrt{۱۰})^{۲}=۱۰$. اعدادی که بین ۵ و ۱۰ باشند اما مجذور کامل نباشند عبارتند از: ۸ و ۷ و ۶ پس:

$$\sqrt{۵}<\sqrt{۶}<\sqrt{۷}<\sqrt{۸}<\sqrt{۱۰}$$

به نکات زیر دقت کنید:

نکته

مجموع دو عدد گنگ ممکن است عددی گویا شود.

مثال

اعداد $۲-\sqrt{۵}$ و $۷+\sqrt{۵}$ گنگ هستند اما مجموع آن‌ها گویا است.

$$۲\cancel{-\sqrt{۵}}+۷\cancel{+\sqrt{۵}}=۹\in\mathbb{Q}$$

نکته

حاصل تفریق دو عدد گنگ ممکن است عددی گویا شود.

مثال

$\sqrt{۳}-۱۱$ و $۵+\sqrt{۳}-$ هر دو گنگ هستند اما تفریق آن‌ها گویا است.

$$(۱۱-\sqrt{۳})-(-\sqrt{۳}+۵)=۱۱\cancel{-\sqrt{۳}}\cancel{+\sqrt{۳}}-۵=۶\in\mathbb{Q}$$

نکته

حاصل ضرب دو عدد گنگ ممکن است عددی گویا شود.

مثال

$\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند اما $\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۸}=\sqrt{۳۶}=۶$ گویا است.

نکته

حاصل تقسیم دو عدد گنگ ممکن است عددی گویا شود.

مثال

$\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند اما $\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۹}=۳$ گویا است.

درس سوم: قدرمطلق و محاسبه تقریبی

قدر مطلق: فاصله‌ی هر عدد روی محور تا نقطه‌ی صفر را قدر مطلق آن می‌نامیم و با نماد $|\;|$ نمایش می‌دهیم.

مثال

اگر $a=۱$ باشد، حاصل $|۲-a|-|۳+a|+|۵a+۱|$ را به دست آورید.

پاسخ

به جای a عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$$|۲-۱|-|۳+۱|+|۵(۱)+۱|=|۱|-|۴|+|۶|=۱-۴+۶=۳$$

نکته

در محاسبات به مقادیر تقریبی زیر نیاز خواهید داشت.

$\sqrt{۲}\simeq۱/۴$

$\sqrt{۳}\simeq۱/۷$

$\sqrt{۵}\simeq۲/۲$

$\sqrt{۶}\simeq۲/۴$

$\sqrt{۷}\simeq۲/۶$

$\sqrt{۸}\simeq۲/۸$

مثال

به حاصل عبارت‌های زیر توجه کنید.

$$|۲|=۲$$

$$|-۵|=۵$$

$$|۱-۶|=|-۵|=۵$$

$$|۱۱-۳|=|۸|=۸$$

$$\left|\frac{۴}{۳}\right|=\frac{۴}{۳}$$

$$\left|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\right|=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

$$\left|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}\right|=\sqrt{۵}-\sqrt{۳}$$

$$\left|۱-\sqrt{۲}\right|=-(۱-\sqrt{۲})=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

با توجه به این‌که عبارت بیرون آمده از قدرمطلق باید مثبت باشد. بنابراین اگر حاصل عبارت داخل قدرمطلق مثبت بود، آن را می‌توان از داخل قدرمطلق بیرون آورد اما اگر حاصل عبارت داخل قدرمطلق منفی بود، باید آن را در یک منفی ضرب کرد. در $\left|۱-\sqrt{۲}\right|$ داریم:

$$۱-\sqrt{۲}\simeq ۱-۱/۴=-۰/۴$$

حاصل عبارت منفی شد، پس کل $۱-\sqrt{۲}$ باید در منفی ضرب شود.

مثال

اگر $a=۵$ و $b=-۷$ باشد، حاصل $\frac{|a|+|b|}{۲|a-b|}$ را محاسبه کنید.

پاسخ

با جای‌گذاری $a=۵$ و $b=-۷$ در عبارت داریم:

$$\frac{|۵|+|-۷|}{۲|۵-(-۷)|}=\frac{۵+۷}{۲|۵+۷|}=\frac{۱۲}{۲(۱۲)}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$$

مثال

فرض کنید a و b و c اعداد حقیقی باشند. با این شرط که $|a-b|=۲$ و $|b-c|=۳$ و $|c-d|=۴$، مجموع همه‌ی مقادیر ممکن برای $|a-d|$ را به دست آورید.

پاسخ

بنابر خواص قدر مطلق داریم:

$$\left.\begin{matrix} a-b=\pm ۲ \\ b-c=\pm ۳ \\ c-d=\pm ۴ \end{matrix}\right\}$$

با جمع کردن هر دو سمت سه عبارت داریم:

$$\begin{array}{l} a\cancel{-b}=\pm ۲ \\ \cancel{+b}\,\cancel{-c}=\pm ۳ \\ \underline{\cancel{+c}-d=\pm ۴} \\ a-d=-۹ \text{ حداقل } ۹+ \text{ و } \text{حداکثر} \to |a-d|=+۹ \end{array}$$

مثال

حاصل عبارت $|۴\sqrt{۲}-۶|+۲|۳+۲\sqrt{۲}|$ را بیابید.

پاسخ

$$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴ \to ۴\sqrt{۲}\simeq ۴\times ۱/۴=۵/۶ \Rightarrow ۴\sqrt{۲}-۶<۰$$

بنابراین:

$$|۴\sqrt{۲}-۶|+۲|۳+۲\sqrt{۲}|=(۶-۴\sqrt{۲})+۲(۳+۲\sqrt{۲})=۶-۴\sqrt{۲}+۶+۴\sqrt{۲}=۱۲$$

نکته

همواره برای هر عدد مانند a داریم: $\sqrt{a^۲}=|a|$.

مثال

حاصل عبارت $\sqrt{(۱-|۲^۲|)^۲}$ را بیابید.

پاسخ

$$\sqrt{(۱-|۲^۲|)^۲}=|۱-|۲^۲||=|۱-۴|=|-۳|=۳$$

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

درس اول: استدلال

استدلال: استدلال یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم یا مشخص کردن موضوع یا مسئه‌ای که در ابتدا نامشخص بوده است.

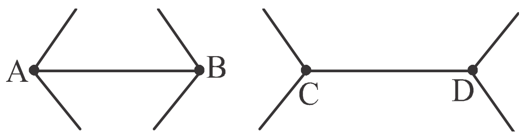
اثبات: به استدلالی که درستی موضوع یا مسئله‌ای را مشخص کند اثبات می‌گوییم.

نکته

رسم شکل در هندسه کمک زیادی به درک مسئله و تشخیص راه‌حل می‌کند، اما باید توجه داشت که مشاهدات ما برای تشخیص اندازه‌ها و یا حالت شکل‌ها، صد در صد قابل اطمینان نیستند و گاهی ما را به نتایج نادرستی می‌رسانند.

مثال

آیا طول پاره‌خط‌های AB و CD برابرند؟



پاسخ

هر دو برابرند. شاید در نگاه اول CD بزرگ‌تر به نظر بیاید اما با استفاده از خط‌کش می‌توانیم امتحان کنیم که AB و CD طول یکسانی دارند.

لذا از این مثال این‌طور برداشت می‌شود که برای دلیل آوردن و یا استدلال یک مسئله استفاده از حواس انسانی کاری بیهوده است.

مثال

نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آن‌ها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما: زیرا هفته‌ی پیش این وزنه بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این حال نتوانست وزنه‌ی ۹۰ کیلویی را بلند کند.

پژمان: امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه‌بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام‌یک قابل اعتمادتر است؟

پاسخ

استدلال نیما منطقی است و کاملاً عقلانی. اما در مورد استدلال پژمان باید گفت که روزهای هفته هیچ ارتباطی بر آمادگی وزنه‌بردار مورد بحث ندارد و موفق نبودن وزنه‌بردار در روزهای زوج کاملاً اتفاقی بوده است و این استدلال بیش‌تر به خرافه-پرستی شبیه است تا استدلال منطقی.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

اکنون می‌خواهیم در مورد اثبات در هندسه سخن بگوییم. برای اثبات یا مشخص کردن هر مسئله‌ای اول اطلاعات و داشته‌هایمان را می‌سنجیم که در اصطلاح به آن‌ها فرض می‌گوییم. پس از آن باید ببینیم که مسئله چه چیزی از ما می‌خواهد یا چه چیزی برای اثبات کردن می‌خواهد. آن چیزی را که باید اثبات کنیم به آن حکم می‌گوییم. راه و روش حل کردن و استدلال با استفاده از فرضیات و رسیدن به حکم مسئله را برهان گوییم.

مثال

ثابت کنید در لوزی، ضلع‌های مقابل برابرند.

پاسخ

ابتدا فرض و حکم مسئله را می‌نویسیم.

فرض: شکل لوزی است.

حکم: ضلع‌های مقابل لوزی برابرند.

استدلال (برهان): می‌دانیم که لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است پس:

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است.
در متوازی الاضلاع، ضلع‌های مقابل برابرند.

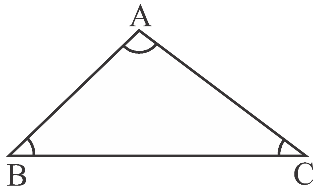
$\Leftarrow$ در لوزی ضلع‌های مقابل برابرند.

مثال

فرض و حکم را برای مسئله زیر بنویسید.

اگر در یک مثلث دو زاویه، نامساوی باشند، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر بزرگ‌تر است.

پاسخ



برای درک بهتر مسئله به سراغ رسم شکل می‌رویم.

با استفاده از شکل داریم:

فرض: ABC مثلث است و $\hat{A} > \hat{B}$

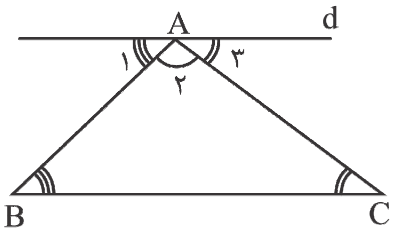
حکم: $BC > AC$

همان طور که در مثال بالا دیدید از این پس با استفاده از علایم و نمادهای ریاضی مسئله، فرض و حکم و راه‌حل‌ها را خلاصه خواهیم کرد و این کار را برایمان راحت‌تر خواهد کرد.

مثال

مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است.

پاسخ



بهترین راه برای بهتر فهمیدن مسئله‌های هندسی کشیدن شکل است.

حالا با استفاده از شکل، فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض: $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلثی دلخواه است و هر نوع مثلثی می‌تواند باشد.

حکم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180$

اثبات: خطی به موازات BC رسم می‌کنیم که از رأس A بگذرد. داریم:

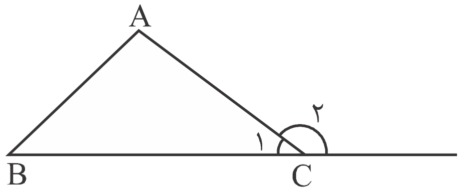
$$\left.\begin{array}{l} d \parallel BC \text{ و } AB \text{ مورب} \rightarrow \hat{B}=\hat{A}_1 \\ d \parallel BC \text{ و } AC \text{ مورب} \rightarrow \hat{C}=\hat{A}_3 \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2+\hat{A}_1+\hat{A}_3=180^\circ \quad \text{نیم صفحه}$$

مثال

ثابت کنید که در هر مثلث، اندازه هر زاویه‌ی خارجی، با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش برابر است.

پاسخ

با استفاده از شکل، فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض: $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلثی دلخواه است و هر نوع مثلثی می‌تواند باشد.

حکم: $\hat{C}_۲ = \hat{A} + \hat{B}$

اثبات (برهان):

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰° است. $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ$

$\hat{C}_۲ , \hat{C}_۱$ تشکیل زاویه‌ی نیم صفحه می‌دهد. $\hat{C}_۲ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\cancel{\hat{C}_۱} = \hat{C}_۲ + \cancel{\hat{C}_۱}$$

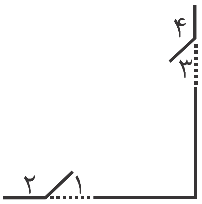
$$\hat{C}_۲ = \hat{A}+\hat{B}$$

دقت کنید وقتی موضوعی در ریاضیات ثابت شود آن موضوع یا مسئله برای همیشه درست خواهد بود و این‌طور نیست که با گذشت زمان، پیشرفت تکنولوژی و ... آن موضوع یا مسئله تغییر کند و نادرست شود.

مثال

داخل اتاقی دو در وجود دارد که هر دوی آن‌ها به یک اندازه باز شده‌اند مانند شکل یعنی $\hat{۳} = \hat{۱}$.

نشان دهید که $\hat{۴} = \hat{۲}$.



پاسخ

فرض: $\hat{۳} = \hat{۱}$

حکم: $\hat{۴} = \hat{۲}$

$\hat{۱}$ و $\hat{۲}$ زاویه‌های مکمل‌اند لذا: $\hat{۱}+\hat{۲} = ۱۸۰^\circ$

$\hat{۴}$ و $\hat{۳}$ هم زاویه‌های مکمل‌اند. $\hat{۳}+\hat{۴} = ۱۸۰^\circ$

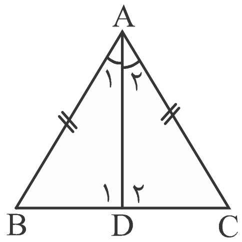
پس: $\hat{۱}+\hat{۲} = \hat{۳}+\hat{۴}$ اما بنا بر فرض $\hat{۳} = \hat{۱}$ پس:

$$\cancel{\hat{۱}} + \hat{۲} = \cancel{\hat{۳}} + \hat{۴} \Rightarrow \hat{۲} = \hat{۴}$$

مثال

در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید.

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و AD نیمساز زاویه‌ی A است. ثابت کنید AD میانه نیز هست.



استدلال: چون AD نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث‌های $\overset{\triangle}{ADB}$ و $\overset{\triangle}{ADC}$ به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) باهم همنهشت‌اند، پس اجزای متناظر آن‌ها برابر است. در نتیجه $BD = DC$.

پاسخ

فرض: $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین $\leftarrow AB = AC$.

AD نیمساز $\hat{A} \leftarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حکم: AD میانه BC است. یعنی $BD = DC$.

ایراد استدلال بالا را با هم مرور می‌کنیم. در اول استدلال بیان شده چون AD نیمساز $\hat{A}$ است. پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ دقت کنید AD نیمساز $\hat{A}$ است، پس فقط داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و نتیجه نمی‌شود $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$. لذا نمی‌توان نظر داد که $\hat{D}_1$ مساوی $\hat{D}_2$ هست یا نه و همین مطلب کل استدلال را نادرست می‌کند. در حالی که باید گفت:

$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow AB = AC$

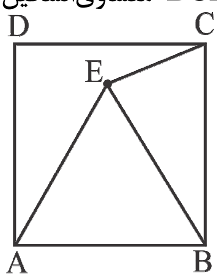
AD نیمساز $A \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

AD ضلع مشترک در دو مثلث

$\overset{\triangle}{ABD}$ به حالت (ض‌زض) همنهشت با $\overset{\triangle}{ADC}$ است $\Rightarrow BD = DC$

مثال

چهارضلعی $ABCD$ یک مربع و ABE یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید که مثلث BCE متساوی‌الساقین است.



پاسخ

فرض: $ABCD$ مربع و ABE مثلث متساوی‌الاضلاع

حکم: BCE مثلث متساوی‌الساقین است. $BE=BC$

اثبات (برهان): با استفاده از فرض می‌دانیم که $ABCD$ مربع است. لذا تمام اضلاع آن با هم برابر است از جمله $AB=BC$ و نیز مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است پس تمام اضلاعش با هم برابرند. $AB=BE$

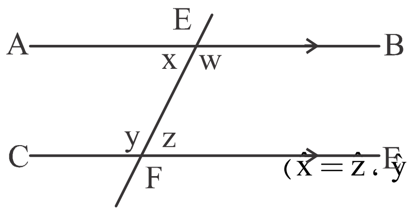
بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{مربع} & ABCD\Rightarrow AB=BC \\ \text{متساوی الاضلاع} & \overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow AB=BE \end{array}\right\}\Rightarrow BC=AB=BE$$

پس $BC=BE$ و این یعنی $\overset{\triangle}{BCE}$ متساوی‌الساقین است.

مثال

نشان دهید که در شکل زیر $\hat{x}+\hat{y}=۱۸۰^\circ$. در این شکل AB و CE موازی‌اند.



پاسخ

فرض: $AB \parallel CE$ و EF خط مورب و قطع کننده‌ی دو خط موازی) $\hat{y}=\hat{w}$ ، $\hat{x}=\hat{z}$)

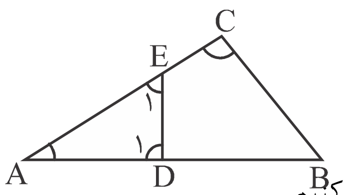
حکم: $\hat{x}+\hat{y}=۱۸۰^\circ$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{مکمل‌اند} & y,z\Rightarrow \hat{y}+\hat{z}=۱۸۰^\circ \\ \text{مورب} & EF, AB \parallel CE\Rightarrow \hat{x}=\hat{z} \end{array}\right\}\Rightarrow \hat{x}+\hat{y}=۱۸۰^\circ$$

مثال

در شکل زیر $\hat{E}_۱=\hat{B}=a$. نشان دهید که $\hat{D}_۱=\hat{C}$.



پاسخ

ابتدا مطابق معمول فرض و حکم را می‌نویسیم و سپس شروع به اثبات مسئله می‌کنیم.

فرض:
$$\left.\begin{array}{r} \overset{\triangle}{ABC} \text{ و } \overset{\triangle}{ADE} \text{ مثلث} \\ \hat{E}_۱=\hat{B}=a \\ A+D_۱+E_۱=۱۸۰^\circ \text{ و } \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

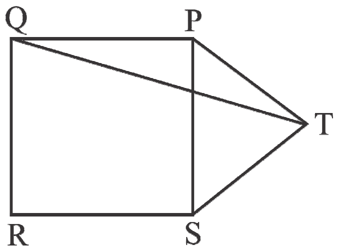
حکم: $\hat{D}_۱=\hat{C}$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \\ \hat{A}+\hat{E}_۱+\hat{D}_۱=۱۸۰^\circ \\ \hat{E}_۱=\hat{B}=a \end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{\hat{A}}+\underbrace{\cancel{\hat{B}}}_{a}+\hat{C}=\cancel{\hat{A}}+\underbrace{\cancel{\hat{E}_۱}}_{a}+\hat{D}_۱\Rightarrow \hat{C}=\hat{D}_۱$$

مثال

در شکل زیر PQRS یک مربع و PST یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید مثلث PQT متساوی‌الساقین است.



پاسخ

ابتدا فرض و حکم را می‌نویسیم و سپس مسئله را اثبات می‌کنیم.

فرض: PQRS مربع و PST مثلث متساوی‌الاضلاع

حکم: PQT مثلث متساوی‌الساقین یعنی $PQ = PT$

اثبات:

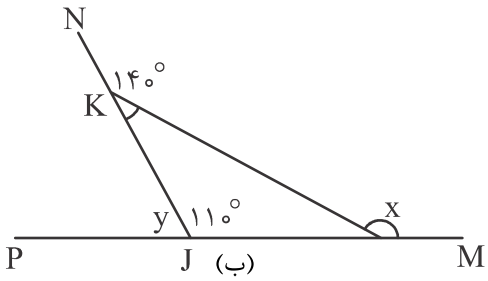
$QP = PS$ اضلاع مربع با هم برابرند.

$PS = PT$ اضلاع مثلث متساوی الاضلاع برابرند.

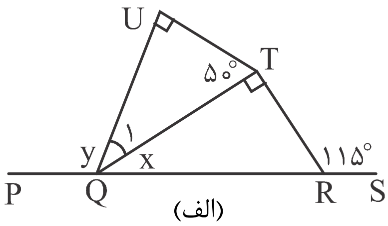
$\Rightarrow QP = PT \Rightarrow$ $Q\overset{\Delta}{P}T$ مثلث متساوی الساقین است.

مثال

در هر یک از شکل‌های زیر مقادیر x و y را پیدا کنید.



(ب)



(الف)

پاسخ

الف) زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع زاویه‌های داخلی غیر مجاورش

$$115^\circ = 90^\circ + x \Rightarrow x = 25^\circ$$

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.

$$\hat{Q}_1 = 180^\circ - (90 + 50^\circ) = 40^\circ$$

$$y = 180^\circ - \hat{Q}_1 - x = 180^\circ - 40^\circ - 25^\circ = 115^\circ$$

$$y = 115^\circ$$

ب)

$$y + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 70^\circ \quad \text{و} \quad 140^\circ + \hat{K} = 180^\circ \Rightarrow \hat{K} = 40^\circ$$

$$x = \hat{K} + 110^\circ = 40^\circ + 110^\circ = 150^\circ$$

درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

سال گذشته آموختیم که دو مثلث در حالت کلی می‌توانند به ۳ صورت همنهشت باشند:

۱- داشتن سه ضلع برابر (ض‌ض ض)

۲- داشتن دو ضلع برابر و زاویه مساوی بین دو ضلع (ض ز ض)

۳- داشتن دو زاویه‌ی برابر و ضلع مساوی بین دو زاویه (ز ض ز)

همچنین یادگرفتیم که مثلث‌های قائم‌الزاویه، علاوه بر سه حالت فوق به دو صورت دیگر می‌توانند همنهشت باشند.

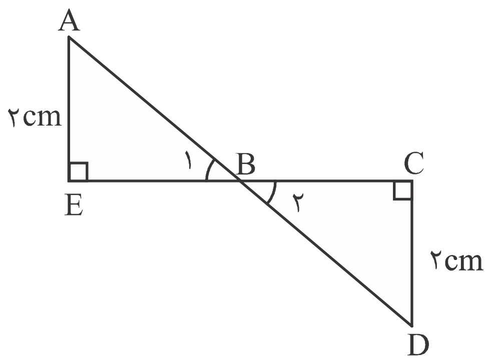
۱- داشتن وتر و یک ضلع برابر (و ض)

۲- داشتن وتر و یک زاویه‌ی تند برابر (و ز)

اکنون روش‌های ریاضی نوشتن حالت‌های همنهشتی دو مثلث را نیز با مثال زیر برای شما بیان می‌کنیم.

مثال

در شکل زیر پاره‌خط های AD و EC یکدیگر را نصف کرده‌اند. (منصف یکدیگراند). حالت‌های همنهشتی دو مثلث را بنویسید.



پاسخ

حالت اول (ض‌ض‌ض)

$$\left.\begin{array}{r} AB=BD \text{ طبق فرض} \\ BE=BC \text{ طبق فرض} \\ AE=CD=۲cm \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}E \cong B\overset{\triangle}{C}D \text{ (ض‌ض ض)}$$

حالت دوم (ض زض)

$$\left.\begin{array}{r} AB=BD \text{ طبق فرض} \\ BE=BC \text{ طبق فرض} \\ \hat{B}_۱=\hat{B}_۲ \text{ متقابل به رأس} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}E \cong B\overset{\triangle}{C}D \text{ (ض ز ض)}$$

حالت سوم (ز ض ز)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{B}_2 \text{ متقابل به رأس}\\ \hat{C}=\hat{E}=90^\circ\\ BE=BC \text{ طبق فرض}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E\cong B\overset{\Delta}{C}D \text{ (ز ض ز)}$$

حالت چهارم (و ض)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}=\hat{C}=90^\circ\\ AB=BD \text{ طبق فرض(وتر)}\\ BE=BC \text{ طبق فرض}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E\cong B\overset{\Delta}{C}D \text{ (و ض)}$$

حالت پنجم (و ز)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}=\hat{C}=90^\circ\\ \hat{B}_1=\hat{B}_2 \text{ متقابل به رأس}\\ AB=BD \text{ طبق فرض(وتر)}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{B}E\cong B\overset{\Delta}{C}D \text{ (و ز)}$$

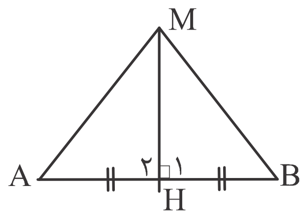
مثال

ثابت کنید فاصله‌ی هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

پاسخ

با استفاده از رسم عمودمنصف و انتخاب دو مثلث مناسب و اثبات همنهشتی آن‌ها به اجزای فرعی می‌رسیم که جواب سؤال ما می‌باشد.

یعنی اگر M نقطه‌ای روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد: $MA=MB$



اثبات:

$$\left.\begin{array}{l}MH=MH \text{ (مشترک)}\\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\\ AH=HB\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\Delta}{H}A=M\overset{\Delta}{H}B\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MA=MB$$

نکته

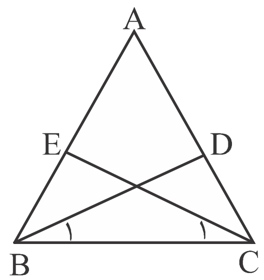
عکس این سؤال هم برقرار است، یعنی اگر فاصله‌ی نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن نقطه روی عمود منصف خط واقع است.

مثال

ثابت کنید نیمسازهای داخلی مقابل به ساق‌های هر مثلث متساوی‌الساقین برابرند.

پاسخ

مثلث دلخواه متساوی‌الساقینی مانند $\overset{\triangle}{ABC}$ رسم می‌کنیم و نیمسازهای دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم می‌کنیم.



با استفاده از شکل می‌خواهیم ثابت کنیم $BD = CE$.

فرض: $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین $(\hat{B}=\hat{C}, AB=AC)$ ، BD نیمساز $\hat{B}$ و CE نیمساز $\hat{C}$

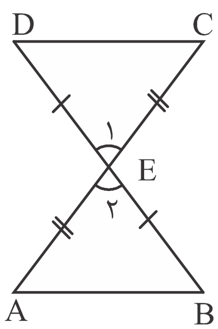
حکم: $BD = CE$.

اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم $BD = CE$. چون BD و CE نیمسازند. بنابراین:

$$\frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{B}_۱$$

$$\begin{cases} \hat{C}_۱ = \hat{B}_۱ \\ BC = BC \quad \text{مشترک} \\ \hat{C} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow B\overset{\triangle}{C}D \overset{(\text{ز ض ز})}{\cong} E\overset{\triangle}{B}C \xrightarrow{\text{اجـــزای}} EC = BD$$

مثال



در شکل E وسط AC و BD است. چرا $AB = CD$ ؟

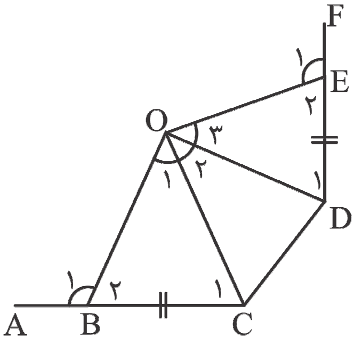
پاسخ

بنابر شکل:

$$\begin{cases} CE = AE \\ \hat{E}_۱ = \hat{E}_۲ \quad \text{متقابل به رأس} \\ DE = BE \end{cases} \Rightarrow C\overset{\triangle}{D}E \overset{(\text{ض ز ض})}{\cong} A\overset{\triangle}{B}E \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{اجزای متناظر}} AB = CD$$

مثال

در شکل داده شده $BC = ED$ ، $\hat{B}_۱ = \hat{E}_۱$ و $\hat{D}_۱ = \hat{C}_۱$. نشان دهید: $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$.



پاسخ

برای حل این سؤال هم از همنهشتی مثلث‌ها کمک می‌گیریم.

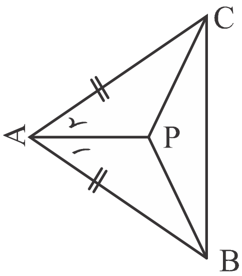
دو مثلث $O\overset{\triangle}{B}C$ و $O\overset{\triangle}{E}D$ را با دقت نگاه کنید. بنا بر فرض مسئله و هم‌چنین شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_۲=\hat{E}_۲\\ BC=DE\\ \hat{C}_۱=\hat{D}_۱\end{array}\right\}\Rightarrow O\overset{\triangle}{B}C\overset{(\text{ز ض ز})}{\cong}O\overset{\triangle}{E}D\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}\hat{O}_۱=\hat{O}_۳$$

مثال

در شکل زیر AP نیمساز زاویه A است.

دلیل متساوی الساقین بودن مثلث PBC را بنویسید.

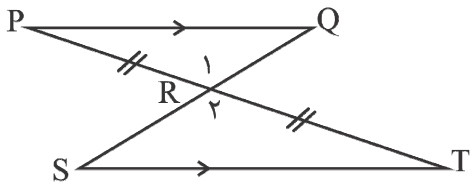


پاسخ

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\ \text{فرض مسئله و شکل}\\ AP=AP\ \text{مشترک}\\ AC=AB\ \text{فرض و شکل}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{P}B\overset{(\text{ض ز ض})}{\cong}A\overset{\triangle}{P}C\Rightarrow PB=PC\Rightarrow$$ مثلث $P\overset{\triangle}{B}C$ متساوی‌الساقین است.

مثال

اگر $PQ||ST$ و R وسط PT باشد، ثابت کنید R وسط QS نیز هست.



پاسخ

فرض: $PQ||ST$ و R وسط PT یعنی $PR=RT$.

حکم: R وسط QS است یعنی $QR=RS$.

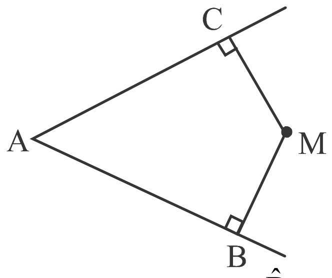
اثبات:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P}=\hat{T}\ (PQ||ST\ \text{و}\ PT\ \text{مورب})\\ \hat{R}_۱=\hat{R}_۲\ \text{متقابل به رأس}\\ PR=RT\ \text{بنا به فرض}\end{array}\right\}\Rightarrow P\overset{\triangle}{Q}R\cong R\overset{\triangle}{S}T\ (\text{ز ض ز})\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}RQ=RS$$

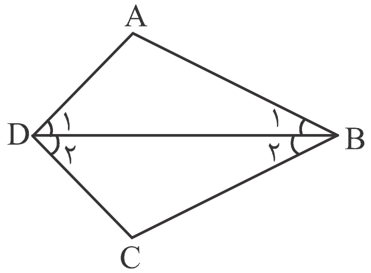
درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسئله‌های هندسه، ابتدا باید صورت مسئله را با دقت بخوانیم و به هر کلمه‌ای از صورت مسئله توجه کافی داشته باشیم و سپس مفاهیم تشکیل دهنده‌ی مسئله را به خوبی بشناسیم. به موارد زیر دقت کنید.

۱) فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو ضلع زاویه‌ی A، یعنی طول پاره‌خط‌های عمودی که از M بر دو ضلع زاویه A رسم می‌شود، یعنی MB و MC (در شکل)



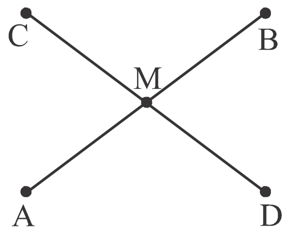
۲) اگر در صورت مسئله گفته شود که BD نیمساز زاویه‌ی B است، یعنی $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$. از این گفته نمی‌توان نتیجه گرفت که $\hat{D}_۱ = \hat{D}_۲$.



۳) اگر درصورت مسئله گفته شود که پاره‌خط CD، پاره‌خط AB را نصف کرده یا پاره‌خط CD از وسط AB گذشته است. فقط می‌توان نتیجه گرفت که $AM = MB$ و نمی‌توان نتیجه گرفت که $CM = MD$.

اما اگر در صورت مسئله گفته شود که پاره‌خط‌های AB و CD یکدیگر را نصف کرده‌اند آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که

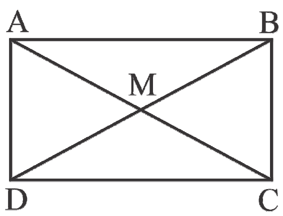
$AM = MB$ و $CM = MD$



یکی از روش‌های اثبات برابری دو پاره‌خط یا دو زاویه در هندسه، استفاده از همنهشتی مثلث‌ها است، یعنی باید دو مثلث بیابیم که دو پاره‌خط یا دو زاویه‌ی مورد نظر، دقیقاً هر کدام ضلع یکی از مثلث‌ها یا زاویه‌ی یکی از مثلث‌ها باشند و پس از اثبات همنهشتی دو مثلث، تساوی دو پاره‌خط یا دو زاویه موردنظر را نتیجه بگیریم.

مثال

ثابت کنید قطرهای مستطیل با هم برابرند.



پاسخ

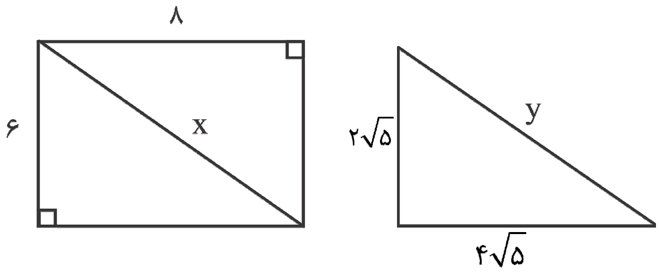
برای فهم بهتر مسئله شکل را رسم می‌کنیم.

در این شکل هشت مثلث دیده می‌شود. اما برای اثبات برابری قطرهای مستطیل باید مثلث‌های مناسب برای این کار انتخاب شود، مثلاً مثلث‌های $\overset{\triangle}{AMB}$ و $\overset{\triangle}{DMC}$ یا مثلث‌های $\overset{\triangle}{BMC}$ و $\overset{\triangle}{AMD}$ برای حل این مسئله به ما کمکی نمی‌کنند، اما با اثبات همنهشتی مثلث‌های $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ یا $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ به نتیجه دلخواه می‌رسیم.

روش دوم، اثبات برابری دو پاره‌خط در هندسه استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس است. به مثال زیر توجه کنید.

مثال

در شکل زیر ثابت کنید قطر مستطیل با وتر مثلث برابر است.



پاسخ

$$x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow x = 10$$

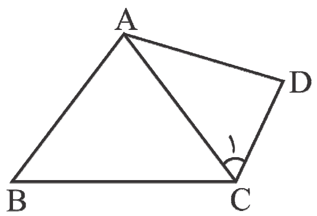
$$y^2 = (2\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 100 \Rightarrow y = 10$$

$$\rightarrow x = y$$

روش سوم، روش مقایسه‌ی دو پاره خط مساوی با یک پاره‌خط است.

مثال

مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ متساوی الاضلاع و $\hat{C}_1 = \hat{D}$ است. ثابت کنید: $BC = AD$.

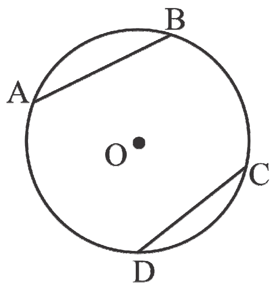


پاسخ

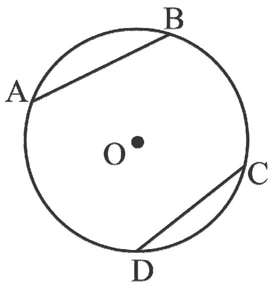
$$\left.\begin{array}{l} \hat{C}_1 = \hat{D} \rightarrow AC = AD \\ AC = BC \ \text{:طبق فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow AD = BC$$

مثال

۱) در شکل زیر وترهای AB و CD با هم مساوی است. نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی است.



۲) در شکل زیر کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی‌است. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.



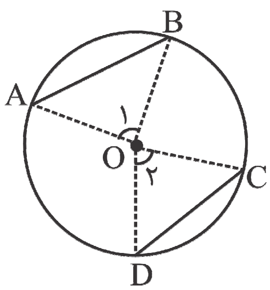
پاسخ

اثبات (۱):

فرض: $AB = CD$

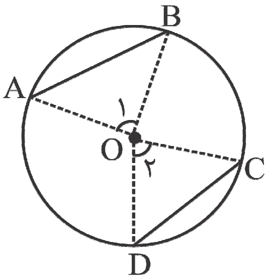
حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

اثبات (برهان) ۱: مطابق شکل با خط‌چین‌هایی مانند آن‌چه در شکل انجام دادیم تشکیل مثلث می‌دهیم و بعد از آن از همنهشتی مثلث‌ها کمک می‌گیریم.



$$\left.\begin{array}{r} \text{طبق فرض: } AB = CD \\ \text{شعاع دایره } OA = OD = r \\ \text{شعاع دایره } OB = OC = r \end{array}\right\} O\overset{\Delta}{A}B \overset{\text{(ض ض ض)}}{\cong} O\overset{\Delta}{C}D \rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

زاویه‌ی مرکزی برابر کمان روبه‌روی خودش است.



اثبات (۲):

مانند قسمت (۱) مثلث‌های $O\overset{\Delta}{A}B$ و $O\overset{\Delta}{C}D$ را تشکیل می‌دهیم.

فرض: $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \leftarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲$ (زاویه‌ی مرکزی دایره و کمان روبه‌روی آن با هم برابرند.)

حکم: وتر CD = وتر AB

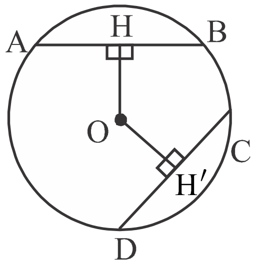
$$\left.\begin{array}{rr} OA=OD=r & \text{شعاع دایره} \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ & \text{فرض} \\ OB=OC=r & \text{شعاع} \end{array}\right\} O\overset{\Delta}{A}B \overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong} O\overset{\Delta}{C}D \rightarrow \text{وتر } AD = \text{وتر } CD$$

نکته

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آن‌ها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند.

مثال

در شکل زیر $OH=OH'$. نشان دهید که وترهای AB و CD با هم برابرند.

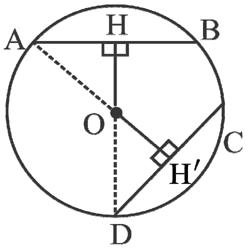


پاسخ

فرض: $OH=OH'$

حکم: $AB=CD$

اثبات: خودمان با اضافه کردن خطوطی که در شکل می‌بینید و به شکل خط‌چین است دو مثلث $O\overset{\Delta}{A}H$ و $O\overset{\Delta}{D}H'$ را تشکیل دادیم.



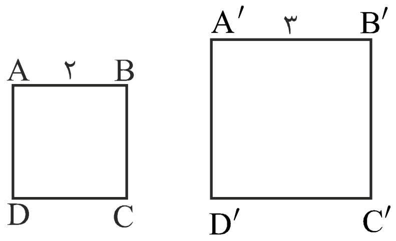
$$\left.\begin{array}{rr} OA=OD=r & \text{شعاع دایره} \\ \hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ & \text{قائمه} \\ OH=OH' & \text{فرض} \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}H \overset{\text{وتر و یک ضلع}}{\cong} O\overset{\Delta}{D}H' \Rightarrow AH=DH' \Rightarrow AB=CD$$

درس پنجم: شکل‌های متشابه

دو چندضلعی در صورتی متشابه هستند که اضلاع آن‌ها مساوی، ضلع‌های متناظر آن‌ها با هم متناسب (به یک نسبت کوچک شده یا بدون تغییر) باشند و زاویه‌های متناظر آن‌ها مساوی باشند.

مثال

دو مربع دلخواه همواره با هم متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های نظیر آن‌ها با هم برابر و نسبت ضلع‌های نظیر آن‌ها به دلیل مساوی بودن هر چهار ضلع برابر است. به مربع‌های شکل توجه کنید:



$\hat{C}=\hat{C}'=۹۰^\circ$ $\quad$ $\hat{A}=\hat{A}'=۹۰^\circ$

$\hat{D}=\hat{D}'=۹۰^\circ$ $\quad$ $\hat{B}=\hat{B}'=۹۰^\circ$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{۲}{۳}\to ABCD \underset{\downarrow}{\sim} A'B'C'D'$$

علامت تشابه دو شکل

عدد $\frac{۲}{۳}$ را نسبت تشابه دو مربع فوق گویند.

نسبت تشابه: نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه را نسبت تشابه گویند. مثلاً در مربع‌های بالا نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۲}$ است.

نکته

به طور کلی هر دو چندضلعی منتظم دلخواه که دارای تعداد اضلاع برابر باشند، متشابه‌اند.

مثال

هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع دلخواه متشابه‌اند، یا هر دو ۶ ضلعی منتظم دلخواه متشابه‌اند.

مثال

آیا هر دو لوزی دلخواه متشابه‌اند؟

پاسخ

خیر، در دو لوزی دلخواه نسبت اضلاع نظیر هم با هم برابر است (به دلیل مساوی بودن چهار ضلع) اما ممکن است که زاویه‌های نظیر آن‌ها برابر نباشند و به همین دلیل دو لوزی دلخواه متشابه نیستند.

نکته

دو لوزی دلخواه در صورتی متشابه‌اند که یک زاویه‌ی مساوی داشته باشند.

مثال

آیا هر دو مستطیل دلخواه متشابه‌اند؟

پاسخ

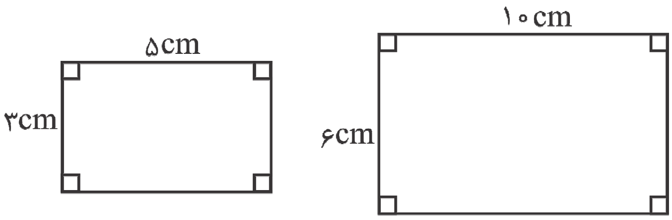
خیر. ممکن است نسبت اضلاع نظیر در دو مستطیل برابر نباشد.

نکته

دو مستطیل دلخواه در صورتی متشابه‌اند که نسبت عرض‌های آن‌ها با نسبت طول‌های آن‌ها برابر باشند.

مثال

دو مستطیل شکل زیر متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های نظیر در دو شکل برابرند و نسبت عرض‌های آن‌ها با نسبت‌طول‌هایشان برابر است.



$$\left.\begin{array}{l} \text{نسبت عرض‌ها} = \dfrac{۳}{۶} = \dfrac{۱}{۲} \\[2ex] \text{نسبت طول‌ها} = \dfrac{۵}{۱۰} = \dfrac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{نسبت طول‌ها = نسبت عرض‌ها}$$

پس دو مستطیل با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{۱}{۲}$ یا ۲ است.

مقیاس نقشه: نقشه‌ی هر مکان با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه آن‌ها را مقیاس نقشه می‌گویند.

برای مثال اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$ باشد و فاصله‌ی دو نقطه روی نقشه ۱ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی متناظر آن‌ها در طبیعت ۱۰۰۰۰۰ سانتی‌متر یا یک کیلومتر است.

نکته

زاویه‌ی بین دو خط در نقشه با زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت برابر است.

مثال

اگر زاویه‌ی بین دو خط در نقشه ۶۷° باشد، زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت نیز ۶۷° است.

نکته

دو شکل همنهشت با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها ۱ است.

تشابه دو مثلث

دو مثلث در سه حالت با هم متشابه هستند:

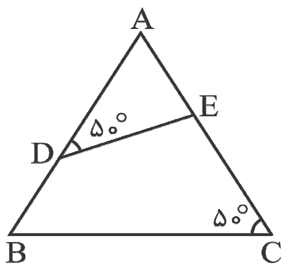
۱- تساوی دو زاویه

۲- دارا بودن دو ضلع متناسب و زاویه‌ی مساوی بین دو ضلع

۳- متناسب بودن سه ضلع

مثال

در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند.



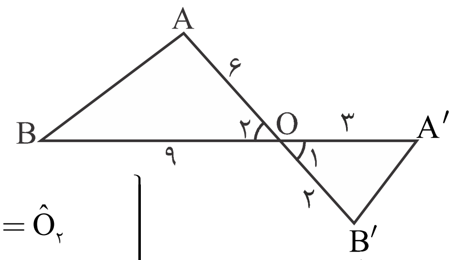
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A} \quad \text{زاویه مشترک}\\ \hat{D}=\hat{C}=۵۰^{\circ}\end{array}\right\} \rightarrow A\overset{\triangle}{D}E \underset{(\text{ز ز})}{\sim} A\overset{\triangle}{B}C$$

در دو مثلث متشابه، ضلع‌های مقابل به زاویه‌های نظیر مساوی متناسب‌اند، یعنی در شکل بالا:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

مثال

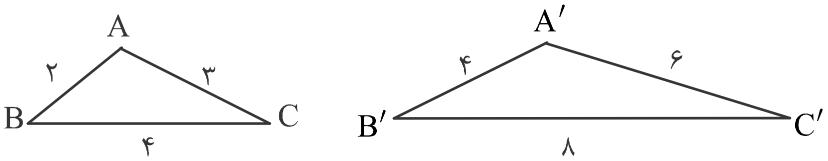
در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱=\hat{O}_۲\\ \dfrac{AO}{B'O}=\dfrac{۶}{۲}=۳\\ \dfrac{BO}{A'O}=\dfrac{۹}{۳}=۳\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}O \sim A'\overset{\triangle}{B'}O$$ (به حالت دو ضلع متناسب و زاویه مساوی بین آنها)

مثال

sدر شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{۲}{۴}=\dfrac{۱}{۲}\\ \dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{۳}{۶}=\dfrac{۱}{۲}\\ \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{۴}{۸}=\dfrac{۱}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$ (به حالت سه ضلع متناسب)

نکته

۱) دو مثلث متساوی‌الساقین همواره متشابه نیستند، بلکه در صورتی متشابه‌اند که زاویه‌ی رأس آن‌ها برابر باشد.

۲) دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین همواره متشابه‌اند.

۳) در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها، نیمسازها، میانه‌ها و عمود منصف‌ها با نسبت تشابه برابر است.

۴) نسبت محیط در هر دو شکل متشابه با نسبت تشابه برابر است.

۵) نسبت مساحت دو شکل متشابه با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال

در دو مثلث متشابه نسبت محیط دو مثلث ۱ به ۳ است. نسبت مساحت و نسبت ارتفاع این دو مثلث را بیابید.

پاسخ

بنابر نکته بالا نسبت تشابه همان نسبت محیط‌ها است. پس نسبت تشابه $\frac{۱}{۳}$ است. لذا نسبت مساحت‌ها $\frac{۱}{۹}$ و نسبت ارتفاع هم

بنابر نکته بالا $\frac{۱}{۳}$ است.

مثال

طول اضلاع یک مثلث ۱۱، ۵ و ۷ سانتی‌متر و طول کوچک‌ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی ۲۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را بیابید.

پاسخ

از آن‌جایی که دو مثلث متشابه‌اند، پس هر ضلع با ضلع متناظرش از مثلث دیگر متناسب است. یعنی کوچک‌ترین ضلع از مثلث اول که طولش ۵ است با کوچک‌ترین ضلع از مثلث دوم که طولش ۲۰ است متناظر است. لذا نسبت تشابه $\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۲۰}$ است.

$$\text{محیط مثلث اول} = ۵+۷+۱۱=۲۳$$

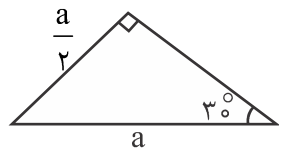
$$\frac{۱}{۴}=\frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}}=\frac{۲۳}{\text{محیط مثلث دوم}}$$

$$\frac{۱}{۴}=\frac{۲۳}{\text{محیط مثلث دوم}} \rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = ۴\times۲۳=۹۲$$

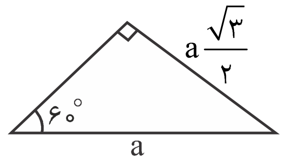
نکات مهم درس

در این جا به مرور برخی نکات مهم به صورت خلاصه می‌پردازیم.

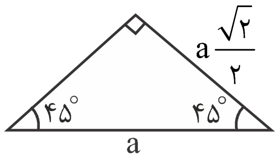
۱- ضلع روبه‌رو به زاویه 30°، نصف وتر است.



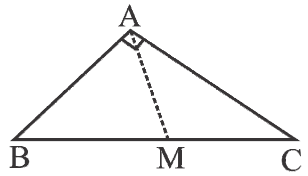
۲- ضلع روبه‌رو به زاویه 60°، وتر $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ است.



۳- ضلع روبه‌رو به زاویه 45°، وتر $\times \frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

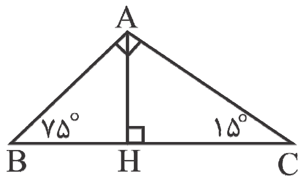


۴- میانه وارد بر وتر نصف وتر است.



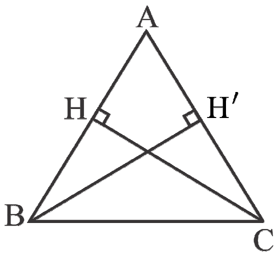
$$AM = \frac{BC}{2}$$

۵- در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه 15° یا 75° باشد ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است.



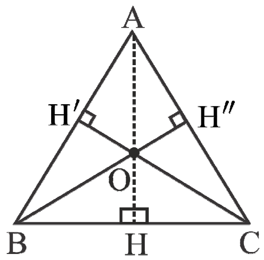
$$AH = \frac{1}{4}BC$$

۶- هر مثلثی که فقط دو ارتفاع مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.



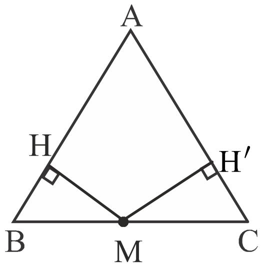
$$CH = BH' \rightarrow \hat{B} = \hat{C} \;,\; AB = AC$$

۷- پاره‌خط‌هایی که از یک نقطه بر ارتفاع یک مثلث متساوی‌الساقین بر دو ساق عمود می‌شوند، مساوی یکدیگرند.



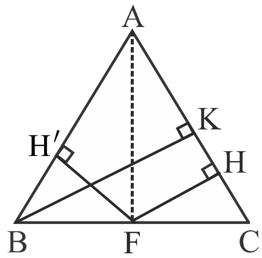
$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AB = AC \end{cases} \rightarrow OH' = OH''$$

۸- پاره‌خط‌های که از وسط قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین، بر دو ساق آن عمود می‌شوند مساوی یکدیگرند.



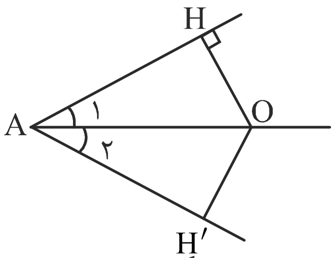
BC وسط $M \Rightarrow MH = MH'$

۹- مجموع فاصله‌های هر نقطه از قاعده مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق برابر است با:



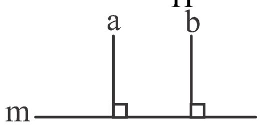
ارتفاع وارد بر ساق $FH + FH' = BK$

۱۰- هر نقطه روی نیمساز زاویه باشد، فاصله‌ی آن از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است.



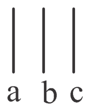
$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \rightarrow OH = OH'$

۱۱- دو خط عمود بر یک خط با هم موازی هستند.



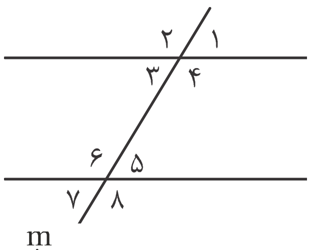
$$\begin{cases} a \perp m \\ b \perp m \end{cases} \rightarrow a \parallel b$$

۱۲- دو خط موازی با یک خط خودشان با هم موازی هستند.



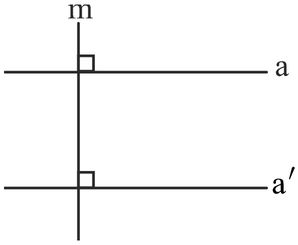
$$\begin{cases} a \parallel b \\ b \parallel c \end{cases} \rightarrow a \parallel c$$

۱۳- اگر خطی مورب، دو خط موازی را قطع کند. داریم:



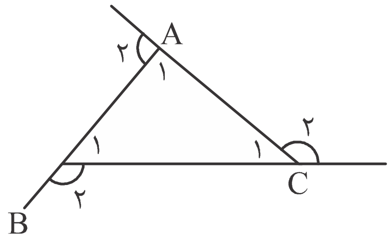
$$\hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷}$$
$$\hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸}$$

۱۴- اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود، بر دیگری نیز عمود است.



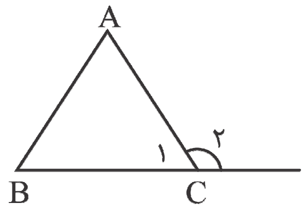
$$\begin{cases} a \parallel a' \\ m \perp a \end{cases} \rightarrow m \perp a'$$

۱۵- مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه و مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث ۳۶۰ درجه است.



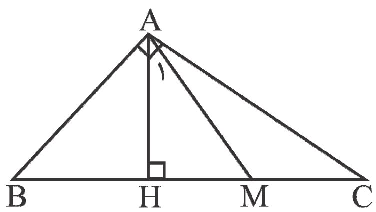
$$\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ$$
$$\hat{A}_۲+\hat{B}_۲+\hat{C}_۲=۳۶۰^\circ$$

۱۶- زاویه‌ی خارجی یک رأس مثلث برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور.



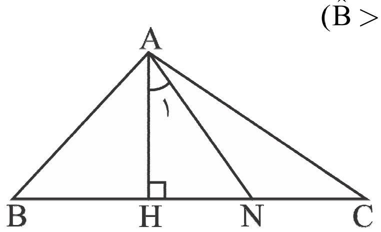
$$\hat{C}_۲=\hat{A}+\hat{B}_S$$

۱۷- در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر برابر است با اختلاف دو زاویه‌ی تند. $(\hat{B}>\hat{C})$



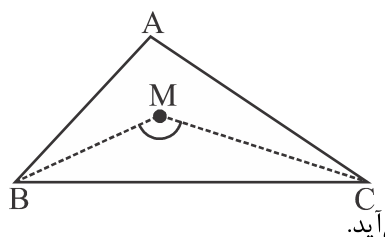
$$\boxed{\hat{A}_۱=\hat{B}-\hat{C}}$$

۱۸- زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز برابر است با نصف اختلاف دو زاویه‌ی تند. $(\hat{B}>\hat{C})$



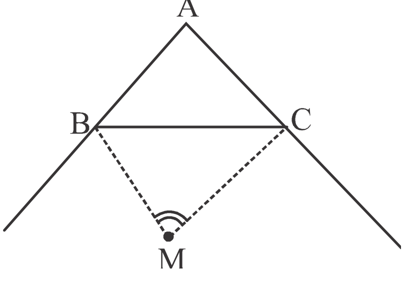
$$\boxed{\hat{A}_۱=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}}$$

۱۹- زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی دو زاویه B و C از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.



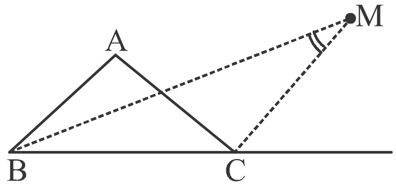
$$\boxed{\hat{M}=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}}$$

۲۰- زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی دو زاویه B و C از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.



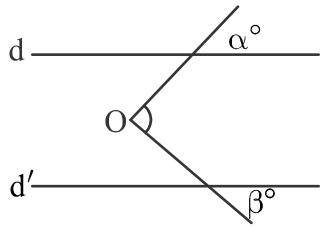
$$\boxed{\hat{M}=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}}$$

۲۱- زاویه‌ی بین نیمساز داخلی $\hat{B}$ و نیمساز خارجی $\hat{C}$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.



$$\boxed{\hat{M}=\frac{\hat{A}}{۲}}$$

۲۲- اگر $d||d'$ باشد، زاویه‌ی O برابر است با جمع دو زاویه‌ی تند.



$$\hat{O}=\alpha^\circ+\beta^\circ$$

۲۳- مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی برابر است با $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$.

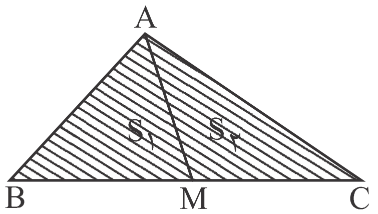
۲۴- مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی محدب برابر است با ۳۶۰°.

۲۵- اندازه‌ی هر زاویه‌ی n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$.

۲۶- تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس n ضلعی محدب برابر است با $n-۳$.

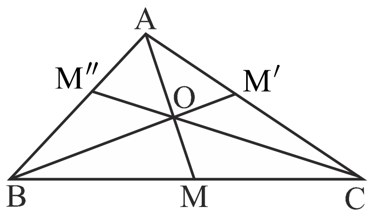
۲۷- تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$.

۲۸- هر میانه مثلث مساحت آن را نصف می‌کند.



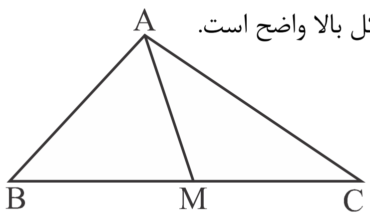
AM میانه برای BC $\rightarrow S_۱=S_۲$

۲۹- سه میانه‌ی یک مثلث از یک نقطه می‌گذرند و در آن نقطه یکدیگر را به نسبت یک به دو تقسیم می‌کنند.



$$\frac{OM}{AO}=\frac{OM'}{OB}=\frac{OM''}{OC}=\frac{۱}{۲}$$

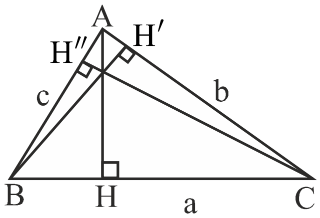
۳۰- سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تبدیل می‌کند. با توجه به شکل بالا واضح است.



۳۱- در مثلث ABC اگر AM میانه باشد داریم:

$$AB^۲+AC^۲=۲AM^۲+\frac{BC^۲}{۲}$$

۳۲- در هر مثلث نسبت اندازه‌ی هر دو ضلع برابر است با نسبت عکس ارتفاع‌های نظیر آن دو ضلع.



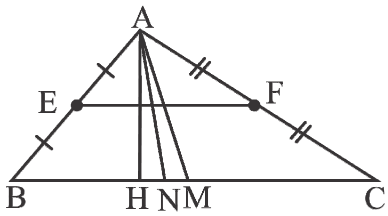
$$\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}=\frac{BH'}{CH''}=\frac{1}{\frac{CH''}{BH'}}\rightarrow$$ عکس نسبت دو ارتفاع متناظر

۳۴- شرط وجودی مثلث: در هر مثلث هر ضلعی از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر و از تفاضل‌شان بزرگ‌تر است.

در شکل بالا $b-c<a<b+c$

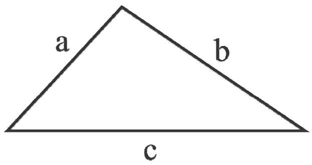
۳۵- پاره‌خطی که وسط دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

$$\left.\begin{matrix}AE=EB\\AF=FC\end{matrix}\right\}\rightarrow EF\parallel BC$$



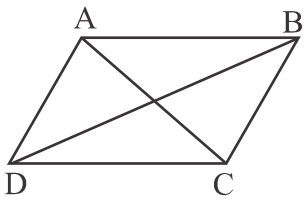
این پاره‌خط، یعنی EF خطوط AH (ارتفاع)، AN (نیمساز) و AM (میانه) را نصف می‌کند.

۳۶- اگر P نصف محیط مثلث باشد. مساحت مثلث S از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید



$$\rightarrow P=\frac{a+b+c}{2}\rightarrow S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

۳۷- در متوازی‌الاضلاع:



الف- اضلاع روبه‌رو با هم برابرند.

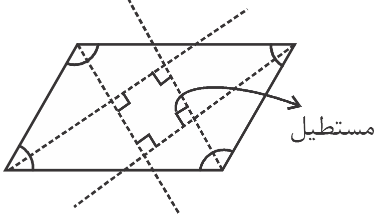
ب- زاویه‌های مقابل برابرند و هر دو زاویه‌ی مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگرند. همچنین مجموع دو زاویه مجاور برابر 180° است.

ج – قطرها منصف یکدیگرند.

د- نقطه تقاطع دو قطر مرکز تقارن آن شکل است.

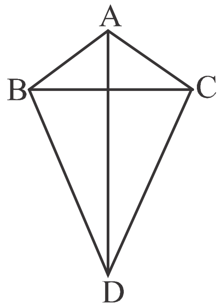
هـ- مساحت برابر است با ارتفاع × قاعده .

و- نیمسازهای داخلی دو به دو بر هم عمودند.



۳۸- مساحت لوزی برابر است با $\dfrac{\text{حاصل‌ضرب دو}}{۲}$.

۳۹- مساحت کایت یا شبه لوزی همانند مساحت لوزی محاسبه می‌گردد.

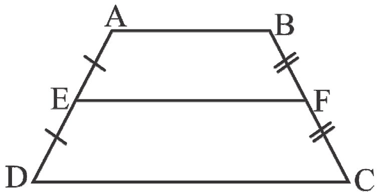


۴۰- مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است پس همه خواص آن را داراست.

۴۱- در هر مربع قطرها بر هم عمود و برابرند و محور تقارن شکل‌اند.

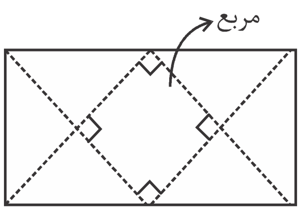
۴۲- مساحت ذوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده ضرب در ارتفاع تقسیم بر ۲.

۴۳- پاره‌خطی که دو سر آن وسط‌های دو ساق ذوزنقه باشد، موازی دو قاعده آن ذوزنقه و اندازه‌ی آن برابر نصف مجموع اندازه‌های دو قاعده ذوزنقه است.

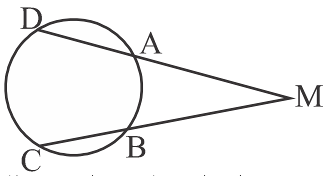


$$\left.\begin{array}{l} AE = ED \\ BF = FC \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} EF \| AB \\ EF \| DC \end{array} \ , \ EF = \frac{(AB + DC)}{۲}$$

۴۴- از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع به‌دست می‌آید.

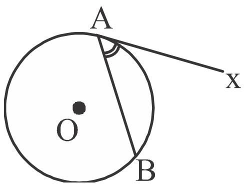


۴۵- از برخورد امتداد دو وتر از دایره در خارج آن، زاویه‌ای به وجود می‌آید که آن را زاویه‌ی خارجی می‌نامیم و اندازه‌ی آن برابر است با:

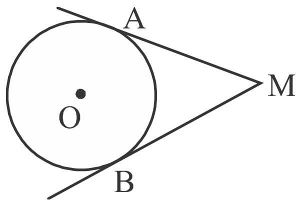


$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BA}}{۲}$$

۴۶- زاویه‌ای را که رأس آن بر روی محیط دایره و یک ضلع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر وتری از دایره باشد، زاویه‌ی ظلی می‌نامیم. زاویه‌ی $\hat{A}$ در شکل زیر یک زاویه‌ی ظلی است و اندازه‌ی آن برابر است با: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

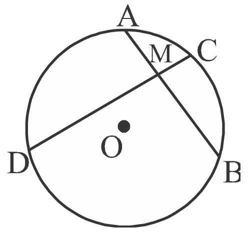


۴۷- طول دو مماسی که از نقطه‌ی واقع در خارج دایره بر آن دایره رسم می‌شوند برابر می‌باشند.



$$MA = MB$$

۴۸- هرگاه دو وتر همدیگر را داخل دایره قطع کنند. داریم:



$$AM \times MB = CM \times MD$$

ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی

هر جمله‌ی درست که قبول درستی آن به برهان یا اثبات نیاز داشته باشد قضیه نام دارد که معمولاً از دو بخش تشکیل شده است:

۱- فرض: که درستی آن را قبول داریم.

۲- حکم: که باید درستی آن را نتیجه بگیریم.

در اثبات بسیاری از مسائل تشابه مثلث‌ها در هندسه از قضیه‌ای به نام تالس و عکس آن کمک می‌گیریم که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم. اما قبل از آن به مقدماتی نیاز است که ابتدا به آن‌ها می‌پردازیم.

خواص نسبت تناسب:

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ ترکیب و تفضیل در صورت

۲) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b \pm a} = \frac{c}{d \pm c}$ ترکیب و تفضیل در مخرج

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{۲a \pm \beta c}{۲b \pm \beta d}$

مثال

اگر $\frac{a}{b} = \frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار عبارت $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ را بیابید.

پاسخ

$$\frac{a+b}{b} = \frac{۵}{۳} \rightarrow \frac{a+b}{a+۲b} = \frac{۵}{۸} \rightarrow \frac{۲a+۲b}{a+۲b} = \frac{۱۰}{۸} = \frac{۵}{۴}$$

مثال

اگر داشته باشیم $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}$ به جای x و y چه اعدادی می‌تواند نوشته شود تا تناسب $\frac{a}{y}=\frac{a+b+c}{x}$ برقرار باشد؟

۱) $x=۳$ و $y=۱۵$
۲) $x=۳$ و $y=۳$
۳) $x=۷$ و $y=۳$
۴) $x=۱۵$ و $y=۳$
۵) $x=y=۵$

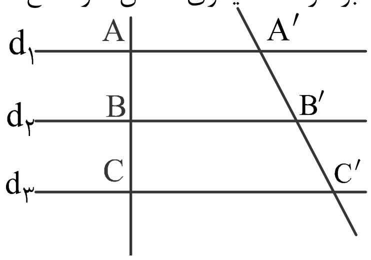
پاسخ

گزینه «۴» صحیح است.

$$\frac{a+b+c}{۳+۵+۷}=\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}\rightarrow\frac{a+b+c}{۱۵}=\frac{a}{۳}$$

قضیه‌ی دسته خطوط موازی با فواصل مساوی:

اگر چند خط موازی یک خط را قطع کنند و بر آن پاره‌خط‌های متساوی پدید آورند، بر هر خط دیگری که آن‌ها را قطع کند، پاره‌خط‌های متساوی پدید خواهد آورد.



$$\left.\begin{array}{l} d_۱ \| d_۲ \| d_۳ \\ AB=BC=\ldots \end{array}\right\} \rightarrow A'B'=B'C'=\ldots$$

نتیجه۱: در هر صفحه خطوط موازی که بر یک خط، پاره‌خط‌های متساوی پدید می‌آورند دو به دو به طور متوالی متساوی‌الفاصله‌اند.

نتیجه۲: در هر صفحه خط‌های موازی که دو به دو به طور متوالی به یک فاصله باشند، بر هر خط که آن‌ها را قطع کند، پاره‌خط‌های متساوی پدید خواهند آورد.

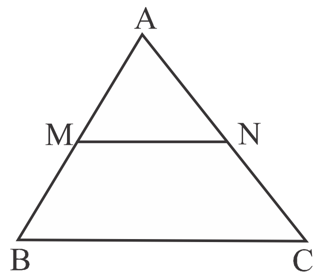
تذکر: عکس قضیه‌ی فوق برقرار نیست (عکس قضیه یعنی جای فرض و حکم را عوض کنیم)
یعنی اگر چند خط روی دو خط، پاره‌خط‌های متناسب پدید آورند، لزوماً موازی نیستند.

قضیه‌ی تالس و عکس آن:

قضیه‌ی تالس: خطی که موازی یک ضلع مثلث رسم شود بر دو ضلع دیگر یا بر امتداد آن‌ها، پاره‌خط‌های متناظر پدید می‌آید که با اضلاع متناظر از آن مثلث متناسبند.

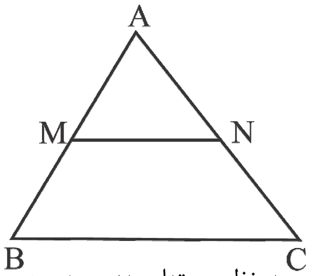
عکس قضیه‌ی تالس: اگر خطی دو ضلع مثلث یا امتداد آن‌ها را قطع کند و بر آن دو ضلع پاره‌خط‌های متناظر با دو ضلع مزبور پدید آورد، با ضلع سوم مثلث موازی خواهد بود.

خلاصه‌ی قضیه‌ی تالس و عکس آن با استفاده از شکل:



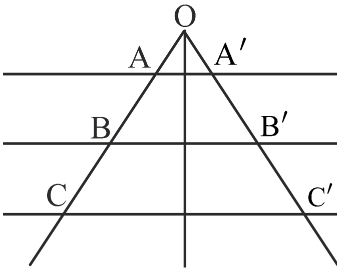
$$MN \| BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

نتیجه ۱: خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، با دو ضلع دیگر یا با امتداد آن‌ها مثلثی پدید می‌آورد که ضلع‌های آن نظیر به نظیر با اضلاع مثلث مزبور متناسبند.



$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

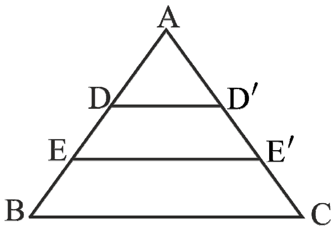
نتیجه ۲: پاره‌خط‌هایی که چند خط متوازی بر دو خط همرس پدید می‌آورند، نظیر به نظیر متناسبند و در هر صفحه خط‌های نامتوازی که چند خط متوازی را قطع کنند و توسط خطوط موازی، بر آن‌ها پاره‌خط‌های نظیر به نظیر متناسب پدید آید، همرسند.



$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=\dots \Leftrightarrow AC\ ,A'C'$$ همرسند

مثال

در شکل زیر $BC=۸$ ، $AD=DE=EB$ و $DD' \parallel EE' \parallel BC$ می‌باشد. $DD'+EE'$ را به‌دست آورید.



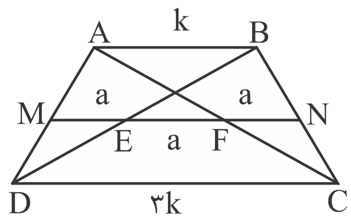
پاسخ

$$\left.\begin{aligned} DD' \parallel BC &\rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{DD'}{BC}=\frac{۱}{۳}\rightarrow DD'=\frac{۸}{۳} \\ EE' \parallel BC &\rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{EE'}{BC}=\frac{۲}{۳}\rightarrow EE'=\frac{۱۶}{۳} \end{aligned}\right\} \rightarrow DD'+EE'=۸$$

مثال

در یک ذوزنقه قاعده‌ی بزرگ سه برابر قاعده‌ی کوچک است. پاره‌خطی موازی قاعده و محدود به ساق‌ها توسط قطرها به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. این پاره‌خط ساق‌ها را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

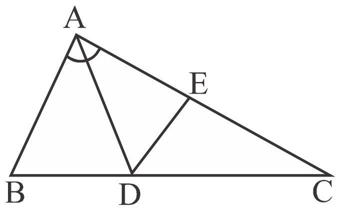
پاسخ



$$\left.\begin{aligned} A\overset{\triangle}{D}C: MF \parallel DC &\rightarrow \frac{AM}{AD}=\frac{MF}{DC}=\frac{۲a}{۳k} \\ A\overset{\triangle}{D}B: MF \parallel AB &\rightarrow \frac{DM}{AD}=\frac{ME}{AB}=\frac{a}{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{AM}{DM}=\frac{۲}{۳}$$

مثال

در شکل زیر $5AB = 3AC = 60$ و AD نیمساز زاویه‌ی A است. $DE \| AB$ اندازه‌ی EC را بیابید.

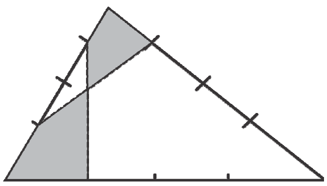


پاسخ

$$ED \| AB \to \frac{EC}{AE} = \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \to \frac{EC}{20 - EC} = \frac{5}{3} \to EC = 12/5$$

مثال

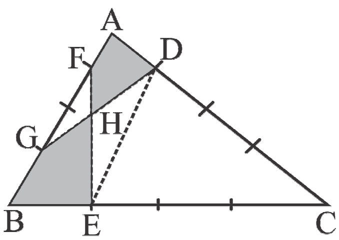
در شکل زیر هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی سایه‌زده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



۱) هم مساحت
۲) هم محیط
۳) همنهشت
۴) متشابه
۵) نسبتی ندارند.

پاسخ

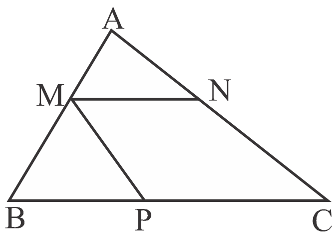
گزینه «۱» صحیح است.



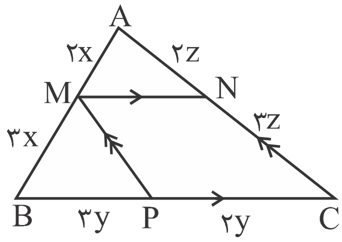
با توجه به این که $\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{4}$، نتیجه می‌گیریم که DE موازی AB می‌باشد. بنابراین نقاط E و D از خط AB به یک فاصله‌اند و چون $BF = AG = \frac{3}{4}AB$، در نتیجه دو مثلث ADG و FEG هم مساحت هستند؛ زیرا قاعده و ارتفاع مساوی دارند. حال اگر از هر دو مثلث مساحت $G\overset{\Delta}{F}H$ را کم کنیم، نتیجه می‌شود: $S_{BGHE} = S_{AFHD}$

مثال

در شکل زیر، $AM=\frac{۲}{۳}MB$ و چهارضلعی $MNCP$ متوازی الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



پاسخ



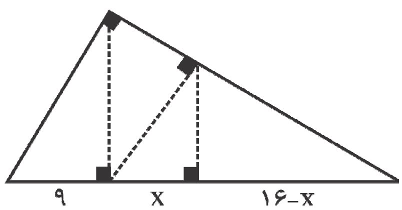
$$MN\|BC \to A\overset{\triangle}{M}N \sim A\overset{\triangle}{B}C \to \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲} = \frac{۴}{۲۵}(I)$$

$$MP\|AC \to B\overset{\triangle}{M}P \sim A\overset{\triangle}{B}C \to \frac{S_{BMP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BM}{AB}\right)^{۲} = \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲} = \frac{۹}{۲۵}(II)$$

$$(II) \text{ و } (I) \Rightarrow S_{MNCP} = S_{ABC} - \frac{۴}{۲۵}S_{ABC} - \frac{۹}{۲۵}S_{ABC} = \frac{۱۲}{۲۵}S_{ABC} = ٪۴۸S_{ABC}$$

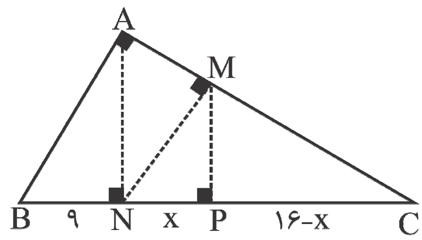
مثال

در شکل زیر ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده‌است. مقدار x ؟



پاسخ

از آن‌جایی که MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند، با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} A\overset{\triangle}{B}C: MN\|AB \xrightarrow{\text{قضیه‌ی}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{۱۶}{۹} \\ A\overset{\triangle}{C}N: MP\|AN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{۱۶-x}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CN}{NB} = \frac{CP}{PN}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶}{۹} = \frac{۱۶-x}{x} \Rightarrow ۱۶x = ۱۴۴ - ۹x \Rightarrow ۲۵x = ۱۴۴ \Rightarrow x = ۵/۷۶$$

فصل چهارم: توان و ریشه

درس اول: توان صحیح

در سال گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد طبیعی آشنا شدید. همچنین آموختید که اگر هر عدد غیر از صفر را به توان صفر برسانیم حاصل عدد یک می‌شود. ($a^{\circ}=۱$)

نکته

صفر به توان صفر تعریف نشده است. (تعریف نشده $=\circ^{\circ}$)

توان منفی: اگر n یک عدد طبیعی و $a\neq\circ$ آن‌گاه داریم: $a^{-n}=(\frac{۱}{a})^{n}=\frac{۱}{a^{n}}$.

مثال

$$۲^{۵}\div ۲^{۸}=\frac{۲^{۵}}{۲^{۸}}=\frac{۱}{۲^{۳}}=۲^{-۳}$$

تذکر: به توان دوم هر عدد مربع آن عدد و به توان سوم آن، مکعب آن عدد گوییم.

مثال

$۳^{۳}=۲۷$ (مکعب ۳) $۳^{۲}=۹$ (مربع ۳)

تذکر: برای تبدیل هر عدد توان‌دار با پایه غیر صفر به توان مثبت، باید پایه را برعکس کرد.

مثال

$$(\frac{۲}{۹})^{-۴}=(\frac{۹}{۲})^{۴} \quad , \quad ۵^{-۵}=(\frac{۱}{۵})^{۵}=\frac{۱}{۵^{۵}}$$

قوانین چهار عملی اصلی در توان‌ها

تمام قوانینی که در سال گذشته آموختید در مورد توان‌های صحیح نیز برقرار می‌باشد.

$$a^{m}\times b^{m}=(a\times b)^{m} \qquad a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

$$a^{m}\div b^{m}=(a\div b)^{m}(b\neq\circ) \qquad a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$$

نکته

برای به توان رساندن عدد تواندار باید توان‌ها را در هم ضرب کنیم. $(a^m)^n = a^{mn}$

مثال

الف) $b^۳ \times b^۵ = b^{۳+۵} = b^۸$

ب) $b^۷ = b^{۶+۱} = b^۶ \times b^۱ = b^۲ \times b^۵$

پ) $۳^{-۴} \times ۳^۹ = ۳^{-۴+۹} = ۳^۵$

ت) $۲^{-۵} \div ۲^{-۲} = ۲^{-۵-(-۲)} = ۲^{-۵+۲} = ۲^{-۳} = \frac{۱}{۲^۳}$

ث) $۴^{-۷} \times ۳^{-۷} = (۴\times۳)^{-۷} = ۱۲^{-۷} = \frac{۱}{۱۲^۷}$

ج) $(\frac{-۲}{۳})^{-۳} \div (\frac{۱}{۶})^{-۳} = (\frac{-۲}{۳} \times \frac{۶}{۱})^{-۳} = (-۴)^{-۳} = \frac{۱}{(-۴)^۳}$

چ) $[(\frac{-۱}{۷})^۲]^{-۴} = (-\frac{۱}{۷})^{۲\times(-۴)} = (\frac{-۱}{۷})^{-۸} = (-۷)^۸$

ح) $(\frac{a}{b\times c})^۴ = \frac{a^۴}{(bc)^۴} = \frac{a^۴}{b^۴ \times c^۴}$

خ) $(۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵)^۴ = ۲^{۱۲} \times ۳^۸ \times ۵^۴$

نکته

اگر هر عدد منفی را به توان زوج برسانیم، مثبت می‌شود.

مثال

$(-۶)^{۱۲} = +۶^{۱۲} = ۶^{۱۲}$

نکته

در محاسبه عبارت‌های توان‌دار وجود پرانتزها بسیار مؤثر می‌باشد.

مثال

$(۲^۲)^۳ = ۲^۶$ اما $۲^{۲^۳} = ۲^۸$ که به وضوح با هم برابر نیستند.

مثال

نصف عدد $۴^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۴^{۵}$ ۳) $۲^{۱۹}$ ۴) $۲^{۵}$ ۵) $۲^{۶}$

پاسخ

گزینه «۳» صحیح است.

$$\text{نصف عدد } x = \frac{۱}{۲} \times x \to \frac{۱}{۲} \times ۴^{۱۰} = \frac{۱}{۲} \times (۲^{۲})^{۱۰} = \frac{۲^{۲۰}}{۲} = ۲^{۱۹}$$

مثال

اگر $a = ۳^{k+۲}$ و $b = ۳^{k}$ باشد. چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

۱) $a = ۲b$ ۲) $a = ۹b$ ۳) $b = ۹a$ ۴) $a = b^{۹}$ ۵) $b = a^{۹}$

پاسخ

گزینه «۲» صحیح است.

$$\frac{a}{b} = \frac{۳^{k+۲}}{۳^{k}} = ۳^{(k+۲)-k} = ۳^{۲} = ۹ \to a = ۹b$$

با روش دیگری هم این مثال حل می‌شود که با جای‌گذاری عدد به جواب برسیم.

مثال

عدد $(\frac{۱}{۶۴})^{-۱۲}$ را به صورت ۲^{m} نوشته‌ایم. m کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۱۸ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲ ۵) ۴۲

پاسخ

گزینه «۴» صحیح است.

$$(\frac{۱}{۶۴})^{-۱۲} = (۲^{-۶})^{-۱۲} = ۲^{۷۲} \to m = ۷۲$$

مثال

حاصل $(\frac{۴۹}{۲۵})^{۳} \times (۰/۴)^{-۶} \times (\frac{۲}{۷})^{۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) ۱ ۴) ۲ ۵) $\frac{۵}{۷}$

پاسخ

گزینه «۳» صحیح است.

$$(\frac{۴۹}{۲۵})^{۳} \times (۰/۴)^{-۶} \times (\frac{۲}{۷})^{۶} = (\frac{۷^{۲}}{۵^{۲}})^{۳} \times \frac{۲^{-۶}}{۵^{-۶}} \times \frac{۲^{۶}}{۷^{۶}} = \frac{\cancel{۷^{۶}}}{\cancel{۵^{۶}}} \times \frac{\cancel{۵^{۶}}}{\cancel{۲^{۶}}} \times \frac{\cancel{۲^{۶}}}{\cancel{۷^{۶}}} = ۱$$

تجزیه اعداد توان‌دار

در تجزیه اعداد توان‌دار، ابتدا پایه‌ها را تجزیه کرده سپس از قوانین توان استفاده می‌کنیم.

مثال

اعداد زیر را تجزیه کنید.

الف) 100

ب) $120^5 \times 540^2 \times 72^4$

پاسخ

الف) $100 = 4 \times 25 = 2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2 = 10^2$

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$100 = 2^2 \times 5^2$

ب) $120^5 \times 540^2 \times 72^4 = (2^3 \times 3 \times 5)^5 \times (2^2 \times 3^3 \times 5)^2 \times (2^3 \times 3^2)^4$

$= 2^{15} \times 3^5 \times 5^5 \times 2^4 \times 3^6 \times 5^2 \times 2^{12} \times 3^8 = 2^{31} \times 3^{19} \times 5^7$

مثال

کوچک‌ترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک که هم مجذور کامل و هم مکعب کامل است را به‌دست آورید.

پاسخ

برای آن‌که عدد مطلوب ما هم مجذور کامل (مربع کامل) و هم مکعب کامل باشد، باید توان آن هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد. یعنی توان آن بر ۶ بخش‌پذیر باشد. لذا کوچک‌ترین عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک که با این توان می‌توان ساخت برابر $2^6 = 64$ است.

جمع و تفریق اعداد توان‌دار

با مثال‌های زیر بیش‌تر توضیح خواهیم داد.

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید.

۱) $3^3 + 3^3 = ?$

۲) $3^3 + 3^3 + 3^3 = ?$

۳) $2^5 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = ?$

پاسخ

از بزرگ‌ترین عامل مشترک (مقسوم‌علیه مشترک) توان‌ها با پایه مشترک فاکتور می‌گیریم:

$$1)\ 3^3+3^3=3^3(1+1)=3^3\times 2=2\times 3^3$$

$$2)\ 3^3+3^3+3^3=3^3(1+1+1)=3^3\times 3=3\times 3^3=3^4$$

$$3)\ 2^5+2^5+2^6+2^7=2^5(1+1+2^1+2^2)=2^5(2+2^1+2^2)=2^5(4+4)=2^5\times 2^3=2^8$$

مثال

حاصل $4^{13}+4^{13}+4^{13}+4^{13}$ کدام است؟

۱) 2^{28} ۲) 2^{30} ۳) 2^{26} ۴) 2^{50} ۵) 2^{52}

پاسخ

گزینه «۱» صحیح است.

$$4^{13}+4^{13}+4^{13}+4^{13}=4^{13}(1+1+1+1)=4^{13}\times 4^1=4^{14}=(2^2)^{14}=2^{28}$$

مثال

حاصل عبارت $\dfrac{(2^5+2^5+2^5)(3^5+3^5)}{6^3+6^3+6^3}$ کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۸۰ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۰۰ ۵) ۹۶

پاسخ

گزینه «۱» صحیح است.

$$\frac{(2^5+2^5+2^5)(3^5+3^5)}{(6^3+6^3+6^3)}=\frac{(3\times 2^5)(2\times 3^5)}{3\times 6^3}=\frac{3^6\times 2^6}{3\times 6^3}=\frac{6^6}{3\times 6^3}=\frac{6^3}{3}=2\times 36=72$$

نکته

اگر $a>1$ باشد:

$$1<a<a^2<a^3\ldots<a^n<a^{n+1}$$

اگر $0<a<1$ آن‌گاه:

$$1>a>a^2>a^3>\ldots>a^n>a^{n+1}$$

به بیان ساده اگر عددی بزرگ‌تر از یک باشد، هر چه‌قدر توانش بیشتر باشد، مقدارش هم بیشتر می‌شود.

مثال

برای $a=۲$ داریم:

$$۱<۲<۲^۲<۲^۳<...<۲^n<۲^{n+۱}$$

$$۱<۲<۴<۸<...<۲^n<۲^{n+۱}$$

اما اگر عددی کوچک‌تر از یک و مثبت داشته باشیم هر چه‌قدر توانش بالاتر رود مقدارش کوچک‌تر خواهد شد.

برای $a=۰/۵$ داریم:

$$a=۰/۵=\frac{۱}{۲}$$

$$۱>\frac{۱}{۲}>(\frac{۱}{۲})^۲>(\frac{۱}{۲})^۳>...>(\frac{۱}{۲})^n>(\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

$$۱>\frac{۱}{۲}>\frac{۱}{۴}>\frac{۱}{۸}>...>(\frac{۱}{۲})^n>(\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

$$۱>۰/۵>۰/۲۵>۰/۱۲۵>...>(۰/۵)^n>(۰/۵)^{n+۱}$$

نکته

اگر a,b دو عدد مثبت باشند و $a>b$ آن‌گاه:

$$a^۲>b^۲\ ,\ a^۳>b^۳\ ,\ ...,\ a^n>b^n$$

نکته

$a^۰=۱$ و $a^۱=a$

مثال

اگر $۰<a<۱$ باشد، کدام‌یک از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) a ۲) $\sqrt{a}$ ۳) $a^۳$ ۴) $a^۸$ ۵) $a^{۱۰}$

پاسخ

اعداد بین ۰ و ۱ هر چه به‌توان بزرگ‌تر برسند، کوچک‌تر می‌شوند.

$$\text{بزرگ‌ترین عدد}=\sqrt{a}=a^{\frac{۱}{۲}}$$

مثال

اگر $۷^x=۳$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $۷^{x+۱}$ ب) ۴۹^x ج) $۴۹^{۲x-۱}$

پاسخ

الف) $۷^{x+۱} = ۷^x \times ۷^۱ = ۳ \times ۷ = ۲۱$

ب) $۴۹^x = (۷^۲)^x = ۷^{۲x} = (۷^x)^۲ = ۳^۲ = ۹$

ج) $۴۹^{۲x-۱} = (۷^۲)^{۲x-۱} = ۷^{۴x-۲} = ۷^{۴x} \div ۷^۲ = (۷^x)^۴ \div ۷^۲ = ۳^۴ \div ۷^۲ = \frac{۸۱}{۴۹}$

مثال

اگر $۷ = ۵^x$ و $۵ = ۷^y$ باشد . حاصل ۵^{xy} و ۷^{xy} را به‌دست آورید.

پاسخ

$۵^{xy} = (۵^x)^y = ۷^y = ۵$

$۷^{xy} = (۷^y)^x = ۵^x = ۷$

مثال

اگر $۵ = ۴^x$ و $۴ = ۵^y$ باشد، حاصل xy چند است؟

پاسخ

$۴^{xy} = (۴^x)^y = ۵^y = ۴ = ۴^۱ \rightarrow xy = ۱$

رقم یکان اعداد توان‌دار

حالت اول: اگر رقم یکان عدد پایه، یکی از ارقام ۰ ، ۱ ، ۵ و ۶ و توان آن عددی طبیعی باشد، رقم یکان، تغییری نمی‌کند.

مثال

رقم یکان اعداد $۲۴۳۵^{۱۹۷}$ و $۹۸۷۶^{۱۲۳}$ را بیابید.

پاسخ

$۲۴۳۵^{۱۹۷} \xrightarrow{\text{رقم یکان}} ۵$

$۹۸۷۶^{۱۲۳} \xrightarrow[\text{رقم یکان حاصل}]{} ۶$

حالت دوم: اگر رقم یکان عدد پایه، یکی از ارقام ۴ یا ۹ و توان آن عدد طبیعی باشد. داریم:

رقم یکان پایه ۹ ⇐
- توان فرد ⟵ رقم یکان حاصل = ۹
- توان زوج ⟵ رقم یکان حاصل = ۱

رقم یکان پایه ۴ ⇐
- توان فرد ⟵ رقم یکان حاصل = ۴
- توان زوج ⟵ رقم یکان حاصل = ۶

مثال

رقم یکان اعداد 1234^{58} و 5779^{23} را بیابید.

پاسخ

$$1234^{58} \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 4$$
$$5779^{23} \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 9$$

حالت سوم: اگر رقم یکان عدد پایه، یکی از ارقام باقی‌مانده به جز شش مورد بالا باشد یعنی ۲، ۳، ۷ و ۸ به جای توان آن باقی‌مانده‌ی تقسیم توانش بر ۴ را قرار می‌دهیم. اگر توانش بر ۴ بخش‌پذیر بود. به جای توان ۴ قرار می‌دهیم و سپس یکان عدد حاصل را به‌دست می‌آوریم.

مثال

رقم یکان اعداد 783^{25} و 4533^{83} را به‌دست آورید.

پاسخ

$$783^{25} \rightarrow \text{رقم یکان} = 3^{1} = 3$$

$25 \div 4$: $25 - 24 = 1$، خارج قسمت 6

$$4533^{83} \rightarrow \text{رقم یکان}\ \ 2^{3} = 8$$

$83 \div 4$: $83 - 80 = 3$، خارج قسمت 20

مثال

رقم یکان حاصل عبارت زیر چند می‌شود؟

$$546^{179} + 2539^{1052} + 9738^{30}$$

پاسخ

رقم یکان هر یک را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$546^{179} \xrightarrow{\text{حالت اول}} \text{رقم یکان حاصل} = 6 \ (*)$$
$$2539^{1052} \xrightarrow{\text{حالت دوم}} \text{رقم یکان حاصل} = 1 \ (**)$$
$$9738^{30} \xrightarrow{\text{حاصل سوم}} \text{رقم یکان حاصل} = 8^{2} = 6\boxed{4} \rightarrow \text{پس رقم یکان حاصل} = 4 \ (***)$$

$30 \div 4$: $30 - 28 = 2$، خارج قسمت 7

حال برای محاسبه‌ی رقم یکان مجموع ۳ عدد باید ۳ رقم یکان حاصل شده (*) و (**) و (***)را با هم جمع می‌کنیم.
داریم:

$$\text{مجموع ۳ رقم یکان} = 6 + 1 + 4 = 11 \xrightarrow{\text{رقم یکان}} 1$$

درس دوم: نماد علمی

نماد علمی: در ریاضیات برای نوشتن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک آن اعداد را به شکل خلاصه‌تر می‌نویسیم که در اصطلاح به این شکل خلاصه‌نویسی نماد علمی آن عدد می‌گوییم . نوشتن اعداد به صورت نماد علمی به یکی از سه حالت زیر است:

الف) اگر عدد صحیح باشد (دارای اعشار نباشد) ابتدا آن را تبدیل به یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر نموده و در عدد ۱۰ ضرب می‌کنیم و به تعداد عددهای بعد از اعشار برای آن توان مثبت قرار می‌دهیم.

مثال

عدد ۴۲۷۶۵ را به صورت نماد علمی بنویسید.

پاسخ

عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی به صورت ۴/۲۷۶۵ است. تعداد رقم‌های اعشار ۴ تا است. پس:

$$۴۲۷۶۵ = ۴/۲۷۶۵ \times ۱۰^{۴}$$

مثال

عدد ۶۲۳۰۰۰۰۰۰۰۰ را به صورت نماد علمی بنویسید.

پاسخ

بعد از ۶ یک اعشار می‌زنیم پس عدد اعشاری آن ۶/۲۳۰۰۰۰۰۰۰۰ است. تعداد ارقام بعد از ممیز ۱۰ رقم است. چون نوشتن صفر در جلوی رقم اعشار از راست اثری ندارد پس نماد علمی به شکل $۶/۲۳ \times ۱۰^{۱۰}$ می‌شود.

ب) اگر عدد اعشاری بین صفر و یک باشد (یعنی عددی که قسمت صحیح آن صفر است) ابتدا آن را تبدیل به یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر نموده و حاصل را در توانی از ۱۰ ضرب می‌کنیم و به تعداد صفرهای قبل و بعد از ممیز در عدد اصلی برای ۱۰ توان منفی قرار می‌دهیم.

مثال

عدد ۰/۰۰۱۲۳ را به صورت نماد علمی بنویسید.

پاسخ

ابتدا مطابق توضیح بالا آن را به شکل ۱/۲۳ می‌نویسیم. چون ۰/۰۰۱۲۳ دارای ۳ تا صفر است، پس:

$$\underbrace{۰/۰۰}_{۳\ \text{تا}}۱۲۳ = ۱/۲۳ \times ۱۰^{-۳}$$

مثال

عدد ۰/۰۰۰۰۵۴۰۱ را به صورت نماد علمی بنویسید.

پاسخ

$$\underbrace{۰/۰۰۰۰}_{۵\ \text{تا}}۵۴۰۱ = ۵/۴۰۱ \times ۱۰^{-۵}$$

مثال

$0/25\times10^{-3}$ را به صورت نماد عملی بنویسید.

پاسخ

$0/25$ نماد علمی $= 2/5\times10^{-1}$

$0/25\times10^{-3} = 2/5\times10^{-1}\times10^{-3} = 2/5\times10^{-4}$ نماد علمی

ج) اگر عدد مورد نظر اعشاری و بزرگ‌تر از ۱ باشد (قسمت صحیح آن غیر صفر باشد) ابتدا آن عدد را تبدیل به یک عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی مخالف صفر نموده و ممیز را هر چند رقم که به عقب می‌بریم برای عدد ۱۰ توان مثبت قرار می‌دهیم.

مثال

عدد $542/31$ را به صورت نماد علمی بنویسید.

پاسخ

ممیز را ۲ رقم به عقب می‌بریم تا عدد اعشاری با قسمت صحیح یک رقمی شود. یعنی $5/4231$ و چون ۲ رقم عقب رفته‌ایم برای عدد ۱۰ توان ۲ قرار می‌دهیم یعنی 10^2 . پس:

$$5\underline{42}/31 = 5/4231\times10^2$$

به اندازه این ۲ رقم

عقب می‌رویم

مثال

حاصل $423/1\times0/002\times10^3$ را به صورت نماد علمی بنویسید.

پاسخ

هر یک را به شکل نماد علمی می‌نویسیم:

$$423/1 = 4/231\times10^2 \quad , \quad 0/002 = 2\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow 423/1\times0/002\times10^3 = 4/231\times10^2\times2\times10^{-3}\times10^3 = 8/462\times10^{2+(-3)+3} = 8/462\times10^2$$

نکته

در مقایسه نمادهای علمی عددی بزرگ‌تر است که توان آن بزرگ‌تر است.

مثال

$$5/7\times10^{19} > 3/4\times10^7 \quad , \quad 1/7\times10^{-6} < 3/411\times10^{-2}$$

نکته

در مقایسه نمادهای علمی با توان مساوی، عدد بزرگ‌تر است که ضریب عددی آن بزرگ‌تر باشد.

مثال

$$1/407\times10^{-8} < 4\times10^{-8} \quad , \quad 5/31\times10^{38} > 4/02\times10^{38}$$

درس سوم: ریشه‌گیری

ریشه دوم: به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$ را ریشه‌های دوم b می‌نامند. همان‌طور که می‌دانید اعداد منفی ریشه دوم ندارند و ریشه دوم صفر، صفر است.

مثال

ریشه‌های دوم $\frac{۲۵}{۱۰۰}$ $\begin{cases}\sqrt{\frac{۲۵}{۱۰۰}}=\frac{۵}{۱۰}\\ -\sqrt{\frac{۲۵}{۱۰۰}}=\frac{-۵}{۱۰}\end{cases}$ و ریشه‌های دوم ۴ $\begin{cases}\sqrt{۴}=۲\\ -\sqrt{۴}=-۲\end{cases}$

ریشه سوم: به طور کلی اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[۳]{b}$ نشان می‌دهیم. هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد. ریشه سوم برعکس توان سوم می‌باشد، یعنی ریشه سوم عدد ۸ ، عدد ۲ است و توان سوم عدد ۲، عدد ۸ می‌باشد.

مثال

$۳^۳=۲۷\rightarrow\sqrt[۳]{۲۷}=۳$, $۵^۳=۱۲۵\rightarrow\sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$

نکته

۱) ریشه سوم اعداد منفی، منفی است.

۲) ریشه دوم مجذور هر عدد مساوی قدرمطلق آن می‌باشد، یعنی $\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال

$$(-۲)^۳=-۸\rightarrow\sqrt[۳]{-۸}=-۲$$
$$\sqrt{(-۴)^۲}=|-۴|=|۴|=۴$$
$$(-۵)^۳=-۱۲۵\rightarrow\sqrt[۳]{-۱۲۵}=-۵$$
$$\sqrt{(\sqrt{۵}-\sqrt{۷})^۲}=|\sqrt{۵}-\sqrt{۷}|=\sqrt{۷}-\sqrt{۵}$$

ضرب و تقسیم رادیکال‌ها: روابط زیر برای ضرب و تقسیم دو رادیکال با فرجه‌های ۲ و۳ یا ریشه‌های دوم و سوم هر عدد حقیقی برقرار است.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$
$$\sqrt[۳]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{b}} \quad , \quad \sqrt[۳]{ab}=\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{b}$$

مثال

$$\sqrt{25\times 100}=\sqrt{25}\times\sqrt{100}=5\times 10=50$$

$$\sqrt{\frac{16}{100}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}=\frac{4}{10}$$

$$\sqrt[3]{8\times 125}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{125}=2\times 5=10$$

$$\sqrt[3]{\frac{-8}{125}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{-2}{5}$$

$$\sqrt[3]{32}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{32\times 2}=\sqrt[3]{64}=4$$

$$\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$$

$$\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{1+8}}}=\sqrt{14+\sqrt{1+3}}=\sqrt{14+2}=\sqrt{16}=4$$

ساده کردن يك راديكال

در ساده‌کردن یک رادیکال، رادیکال را به صورت ضرب یا تقسیم چند رادیکال می‌نویسیم:

مثال

$\sqrt{9a^4}$ را ساده کنید.

پاسخ

$$\sqrt{9a^4}=\sqrt{9}\times\sqrt{a^4}=\sqrt{9}\times\sqrt{a^2}\times\sqrt{a^2}=3\times a\times a=3a^2$$

مثال

$\sqrt{b^5}$ را ساده کنید.

پاسخ

$$\sqrt{b^5}=\sqrt{b^4}\times\sqrt{b}=b^2\times\sqrt{b}=b^2\sqrt{b}$$

درس چهارم: جمع و تفریق رادیکال‌ها

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آن‌ها را با هم جمع یا تفریق کرد.

مثال

$$7\sqrt{2}+3\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$

$$7\sqrt{2}-3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12}+9\sqrt{3}=2\sqrt{3}+9\sqrt{3}=11\sqrt{3}$$

اما $2\sqrt{5}$ را با $7\sqrt{2}$ نمی‌توان جمع کرد چون قسمت رادیکالی‌شان یکی نیست. همچنین $2\sqrt{2}$ و $2\sqrt[3]{2}$ را نمی‌توان با هم جمع کرد چون قسمت رادیکالی‌شان یکی نیست.

مثال

حاصل $\sqrt{48}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ را محاسبه کنید.

پاسخ

به دو روش حل می‌کنیم:

روش اول: $\sqrt{48}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{48\times 3}+\sqrt{48\times 2}=\sqrt{4^2\times 3^2}+\sqrt{4^2\times 3\times 2}$

$$=(4\times 3)+4\sqrt{6}=12+4\sqrt{6}$$

روش دوم: $\sqrt{48}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{4^2\times 3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})=4\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=4\sqrt{3\times 3}+4\sqrt{3\times 2}$

$$=4\times 3+4\sqrt{6}=12+4\sqrt{6}$$

بنابراین برای ساده کردن عبارت‌های زیر رادیکال ابتدا آن‌ها را به شکل توان‌دار تجزیه می‌کنیم.

تفاوت روش اول و دوم در این است که در روش اول ابتدا $\sqrt{48}$ را در پرانتز ضرب می‌کنیم سپس حاصل را به شکل توان‌دار تجزیه می‌کنیم. اما در روش دوم ابتدا $\sqrt{48}$ را به شکل توان‌دار $\sqrt{4^2\times 3}$ می‌نویسیم و سپس در پرانتز ضرب می‌کنیم.

ویژه‌ی علاقه‌مندان به ریاضی

ریشه nام عدد : اگر $a^n=b$ باشد، a را ریشه nاُم b می‌نامند.

مثال

$32=2^5$ است یا $2=\sqrt[5]{2^5}=\sqrt[5]{32}$ پس ریشه پنجم ۳۲ ، ۲ است.

$81=3^4$ است، پس ۳ ریشه چهارم ۸۱ می‌باشد. $81=(-3)^4$ است، پس ۳- نیز ریشه چهارم ۸۱ می‌باشد.

نکته

در ریشه‌های زوج هم خود عدد و هم قرینه آن جواب می‌باشند.

مثال

ریشه دوم ۲۵ برابر ۵ و ۵- است.

تعریف: اگر n زوج باشد، فرجه nام $(\sqrt[n]{\ })$ یک عدد برابر عدد مثبتی است که از ریشه nام به دست می‌آید و اگر n فرد باشد، فرجه nام $(\sqrt[n]{\ })$ برابر ریشه nام است.

مثال

ریشه دوم ۱۶ برابر ۴ و ۴- است ولی $\sqrt{۱۶}$ فقط برابر ۴ می‌باشد یعنی $\sqrt{۱۶} = ۴$.

ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است. پس $\sqrt[۳]{۸} = ۲$.

ریشه سوم ۶۴- برابر ۴- است، پس $\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$.

نکته

اعداد منفی ریشه زوج ندارند و هرگاه صحبت از $\sqrt{b}$ (یا $\sqrt[n]{b}$ که n زوج باشد) می‌کنیم، فرض می‌کنیم b عددی نامنفی است.

نکته

جواب رادیکال با فرجه زوج همیشه عددی مثبت است.

مثال

حاصل $\sqrt{۳۶}$ برابر است با:

۱) ۶   ۲) ۶-   ۳) ± ۶ ۴) $\sqrt{۶}$ ۵) $-\sqrt{۶}$

پاسخ

گزینه «۱» صحیح است.

حاصل رادیکال با فرجه زوج همواره عددی مثبت است، پس $\sqrt{۳۶} = ۶$.

ولی ریشه دوم یک عدد، هم مثبت و هم منفی خواهد بود، مثلاً ریشه دوم ۳۶ برابر ± ۶ است.

خواص ریشه‌گیری

۱) $\sqrt{a^۲} = |a|$

درحالت کلی $\sqrt[۲k]{a^{۲k}} = |a|$

برای هر دو عدد نامنفی a و b :

۲) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ یا $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

۳) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ یا $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

۴) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

اگر n زوج باشد، عدد نامنفی پشت رادیکال را می‌توان وارد رادیکال کرد و اگر n فرد باشد، عدد پشت رادیکال را می‌توان وارد رادیکال کرد.

$$۵)\ \sqrt[n]{a^{n+۱}b}=a\sqrt[n]{ab}$$

در ریشه‌گیری می‌توان عددی را که توان آن در زیر رادیکال از فرجه بزرگ‌تر است از رادیکال خارج نمود.

مثال

$$۱)\ \sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۵]{۸}=\sqrt[۵]{۳۲}=۲ \quad \text{و} \quad \sqrt[۵]{۳۲}=\sqrt[۵]{۴}\times\sqrt[۵]{۸}=\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۱۶}$$

$$۲)\ \frac{\sqrt[۵]{۶۴}}{\sqrt[۵]{۲}}=\sqrt[۵]{\frac{۶۴}{۲}}=\sqrt[۵]{۳۲}=۲$$

$$۳)\ \sqrt[۴]{\frac{۱۶}{۸۱}}=\frac{\sqrt[۴]{۱۶}}{\sqrt[۴]{۸۱}}=\frac{۲}{۳}$$

$$۴)\ ۷\sqrt[۷]{۳}=\sqrt[۷]{۷^{۷}\times ۳}$$

$$۵)\ \sqrt[۳]{۵^{۷}\times ۳^{۴}\times ۲^{۲}}=\sqrt[۳]{۵^{۶}\times ۳^{۳}\times ۵\times ۳\times ۲^{۲}}=۵^{۲}\times ۳\times\sqrt[۳]{۵\times ۳\times ۴}=۷۵\sqrt[۳]{۶۰}$$

نکته

$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ یا $\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}\neq a+b$

نکته

رابطه فرجه با توان به صورت $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$ می‌باشد.

مثال

$$\sqrt[۳]{۵^{۲}}=۵^{\frac{۲}{۳}}$$

مثال

اگر $\sqrt[x]{۲}=((((۱۶)^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}$ مقدار x را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\sqrt[x]{۲}=(۲^{۴})^{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۴}{۲۴}}=۲^{\frac{۱}{۶}}=\sqrt[۶]{۲}$$

$$\Rightarrow\sqrt[x]{۲}=\sqrt[۶]{۲}\Rightarrow x=۶$$

مثال

حاصل عبارت $\sqrt{۳۲}-۲\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۷۲}-\sqrt{۸}$ کدام است؟

۱) $۱۴\sqrt{۲}$ ۲) $۱۶\sqrt{۲}$ ۳) $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) $۲۲\sqrt{۲}$ ۵) $۱۱\sqrt{۲}$

پاسخ

گزینه «۱» صحیح است.

$$\underbrace{\sqrt{۳۲}}_{۱۶\times۲}-۲\underbrace{\sqrt{۱۸}}_{۹\times۲}+۳\underbrace{\sqrt{۷۲}}_{۳۶\times۲}-\underbrace{\sqrt{۸}}_{۴\times۲}=۴\sqrt{۲}-۲\times۳\sqrt{۲}+۳\times۶\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}=۱۴\sqrt{۲}$$

مثال

عبارت $(\sqrt{\frac{۲}{۴}}-\sqrt{\frac{۲}{۹}})\sqrt{\frac{۴}{۵۰}}$ را خلاصه کنید.

پاسخ

$$(\sqrt{\frac{۲}{۴}}-\sqrt{\frac{۲}{۹}})\sqrt{\frac{۴}{۵۰}}=(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۳})\frac{۲}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۲}}{۶}\times\frac{۲}{۵\sqrt{۲}}=\frac{\cancel{\sqrt{۲}}}{۶}\times\frac{۲}{۵\cancel{\sqrt{۲}}}=\frac{۱}{۱۵}$$

توجه : $\sqrt{۵۰}=\sqrt{۲۵\times۲}=۵\sqrt{۲}$

مثال

حاصل $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt[۶]{۲}$ ۴) ۴ ۵) $\sqrt{۲}$

پاسخ

گزینه «۵» صحیح است.

$$\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۳]{\sqrt{۲^۲\times۲}}=\sqrt[۶]{۲^۳}=۲^{\frac{۳}{۶}}=۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$$

گویا کردن مخرج‌کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا ساده کردن محاسبات مورد نظر، مخرج کسر مورد نظر را با انجام عملیاتی از حالت رادیکالی خارج کنیم. در این جا ۲ نوع را ذکر می‌کنیم:

$$۱)\ \frac{۱}{\sqrt[n]{a}}\times\frac{\sqrt[n]{a^{n-۱}}}{\sqrt[n]{a^{n-۱}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-۱}}}{a}$$

$$۲)\ \frac{۱}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\text{مزدوج مخرج}}{\text{مزدوج مخرج}}=\frac{۱}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^{۲}-(\sqrt{b})^{۲}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

نکته

در نوع دوم، برای گویا کردن از اتحاد مزدوج به شکل زیر استفاده می‌شود.

$$(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$$

مثال

$$۱)\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad \text{و}\quad \frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^{۲}}}{\sqrt[۳]{۵^{۲}}}=\frac{\sqrt[۳]{۵^{۲}}}{۵}$$

$$۲)\ \frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۱}\times\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{۲\sqrt{۲}-۱}=\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{(۲\sqrt{۲})^{۲}-۱^{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{۴\times ۲-۱}=\frac{۲\sqrt{۲}-۱}{۷}$$

مثال

حاصل عبارت $\sqrt{۶}(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})+\sqrt{۵۰}-\frac{۶}{\sqrt{۳}}$ برابر کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۸}$ ۴) $\sqrt{۱۲}$ ۵) $\sqrt{۱۵}$

پاسخ

گزینه «۳» صحیح است.

$$\sqrt{۶}(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})+\sqrt{۵۰}-\frac{۶}{\sqrt{۳}}=\underbrace{\sqrt{۱۲}}_{۴\times۳}-\underbrace{\sqrt{۱۸}}_{۹\times۲}+\underbrace{\sqrt{۵۰}}_{۲۵\times۲}-\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}+۵\sqrt{۲}-\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}$$

$$=۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}=۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲^{۲}\times۲}=\sqrt{۸}$$

مثال

اندازه طول یک مستطیل $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ واحد و مساحت آن ۱ واحد مربع بوده؛ محیط آن را به دست آورید.

پاسخ

$$\text{عرض}\times\text{طول}=۱\rightarrow\ \text{عرض}=\frac{۱}{\text{طول}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۳-۲}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط}=۲\times(\text{عرض}+\text{طول})=۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۲\times۲\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳}$$

مثال

حاصل $\frac{\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}}+(۱+۴\sqrt{۵})(۱-\sqrt{۲۰})$ کدام است؟

۱) ۴۵- ۲) ۴۴- ۳) ۳۶- ۴) ۳۴- ۵) ۳۲-

پاسخ

گزینه «۲» صحیح است.

ابتدا $\frac{\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}}$ را گویا می‌کنیم برای این کار از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}}\times\frac{۲+\sqrt{۵}}{۲+\sqrt{۵}}=\frac{۲\sqrt{۵}+۵}{۴-۵}=-۲\sqrt{۵}-۵$$

و همچنین داریم:

$$(۱+۴\sqrt{۵})(۱-\sqrt{۲۰})=۱-\sqrt{۲۰}+۴\sqrt{۵}-۴\sqrt{۱۰۰}=۱-۲\sqrt{۵}+۴\sqrt{۵}-۴۰=۲\sqrt{۵}-۳۹$$

پس:

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۵}}{۲-\sqrt{۵}}+(۱+۴\sqrt{۵})(۱-\sqrt{۲۰})=-۲\sqrt{۵}-۵+۲\sqrt{۵}-۳۹=-۴۴$$

مثال

حاصل $\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}$ را بیابید.

پاسخ

$$\frac{۸}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۸}{\sqrt[۳]{۲^۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۸\sqrt[۳]{۲}}{۲}=۴\sqrt[۳]{۲}$$

مثال

جذر عدد $۵+۲\sqrt{۶}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۵}-\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۵}+\sqrt{۶}$ ۵) $\frac{۱۹}{۲}$

پاسخ

گزینه «۲» صحیح است.

طبق تعریف جذر اگر $\sqrt{a}=b$ آن‌گاه $a=b^۲$ لذا تمام گزینه‌ها را به توان۲ می‌رسانیم هر کدام که توان دومش برابر $۵+۲\sqrt{۶}$ بود، آن‌گزینه جواب است.

گزینه «۵» که به‌وضوح نادرست است. اما برای گزینه‌های دیگر داریم:

$$\text{توان دوم گزینه «۱»} \Rightarrow (\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^۲=(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})=(\sqrt{۲})^۲-\sqrt{۶}-\sqrt{۶}+(\sqrt{۳})^۲$$
$$=۲-۲\sqrt{۶}+۳=۵-۲\sqrt{۶}\neq ۵+۲\sqrt{۶}$$
$$\text{توان دوم گزینه «۲»} \Rightarrow (\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})=(\sqrt{۲})^۲+\sqrt{۶}+\sqrt{۶}+(\sqrt{۳})^۲$$
$$=۲+۲\sqrt{۶}+۳=۵+۲\sqrt{۶}\ \checkmark$$

پس این گزینه درست است.

گزینه‌های «۳» و «۴» هم با این روش نادرست هستند.

مثال

ساده‌ترین عبارت جبری که در $\sqrt[۳]{۴a^۲}$ ضرب شود تا حاصل مربع کامل گردد چیست؟

پاسخ

باید در عبارتی ضرب کنیم که از زیر رادیکال بیرون بیاید، یعنی به مضربی از توان ۳ تبدیل شود.

$$\sqrt[۳]{۴a^۲}=\sqrt[۳]{(۲a)^۲}=(۲a)^{\frac{۲}{۳}}\xrightarrow{\times(۲a)^{\frac{۴}{۳}}}(۲a)^{\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۳}}=۲a^{\frac{۶}{۳}}=(۲a)^۲\rightarrow \text{مربع کامل}$$

مثال

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\dfrac{۵}{\sqrt[۵]{۸}}=?$

ب) $\dfrac{۱۲}{\sqrt[۷]{۲۷}}=?$

ج) $\dfrac{۵}{۳-\sqrt{۸}}=?$

د) $\dfrac{۶}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}=?$

ذ) $\dfrac{۸}{\sqrt{۶}-۲}=?$

ر) $\dfrac{-۲x}{\sqrt{۳x}}=?$

ز) $\dfrac{xy}{\sqrt[۳]{۱۶xy^{۲}}}=? \qquad (x,y\neq ۰)$

پاسخ

الف) $\dfrac{۵}{\sqrt[۵]{۸}}=\dfrac{۵}{\sqrt[۵]{۲^{۳}}}\times\dfrac{\sqrt[۵]{۲^{۲}}}{\sqrt[۵]{۲^{۲}}}=\dfrac{۵\sqrt[۵]{۲^{۲}}}{\sqrt[۵]{۲^{۵}}}=\dfrac{۵\sqrt[۵]{۲^{۲}}}{۲}$

ب) $\dfrac{۱۲}{\sqrt[۷]{۲۷}}=\dfrac{۱۲}{\sqrt[۷]{۳^{۳}}}\times\dfrac{\sqrt[۷]{۳^{۴}}}{\sqrt[۷]{۳^{۴}}}=\dfrac{۱۲\sqrt[۷]{۳^{۴}}}{\sqrt[۷]{۳^{۷}}}=\dfrac{۱۲\sqrt[۷]{۳^{۴}}}{۳}=۴\sqrt[۷]{۳^{۴}}$

ج) $\dfrac{۵}{۳-\sqrt{۸}}=\dfrac{۵}{۳-\sqrt{۸}}\times\dfrac{۳+\sqrt{۸}}{۳+\sqrt{۸}}=\dfrac{۱۵+۵\sqrt{۸}}{۹-۸}=\dfrac{۱۵+۵\sqrt{۸}}{۱}=۱۵+۵\sqrt{۸}$

د) $\dfrac{۶}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}=\dfrac{۶}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}\times\dfrac{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}=\dfrac{۶(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})}{۵-۳}=۳(\sqrt{۵}-\sqrt{۳})$

ذ) $\dfrac{۸}{\sqrt{۶}-۲}=\dfrac{۸}{\sqrt{۶}-۲}\times\dfrac{\sqrt{۶}+۲}{\sqrt{۶}+۲}=\dfrac{۸(\sqrt{۶}+۲)}{۶-۴}=\dfrac{۸(\sqrt{۶}+۲)}{۲}=۴(\sqrt{۶}+۲)$

ر) $\dfrac{-۲x}{\sqrt{۳x}}=\dfrac{-۲x}{\sqrt{۳x}}\times\dfrac{\sqrt{۳x}}{\sqrt{۳x}}=\dfrac{-۲x\sqrt{۳x}}{۳x}=\dfrac{-۲\sqrt{۳x}}{۳}$

ز) $\dfrac{xy}{\sqrt[۳]{۱۶xy^{۲}}}=\dfrac{xy}{\sqrt[۳]{۴^{۲}xy^{۲}}}\times\dfrac{\sqrt[۳]{۴x^{۲}y}}{\sqrt[۳]{۴x^{۲}y}}=\dfrac{\cancel{xy}\sqrt[۳]{۴x^{۲}y}}{۴\cancel{xy}}=\dfrac{\sqrt[۳]{۴x^{۲}y}}{۴}$

توجه کنید که هر یک از $۴^{۲}$ و x و $y^{۲}$ باید از زیر رادیکال خارج شوند و انتخاب $\sqrt[۳]{۴x^{۲}y}$ برای ضرب کردن در صورت و مخرج به همین منظور است.

فصل پنجم: عبارت‌های جبری

درس اول: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

متغیر: نمادهایی که اعداد دلخواهی را نمایش می‌دهند متغیر می‌نامند. زیرا به جای آن‌ها هر عددی می‌تواند قرار بگیرد.

عبارت‌های جبری: هر عبارت جبری شامل تعدادی متغیر، اعمال جبری (ضرب، جمع، تفریق، تقسیم ،ریشه‌گیری و ...) را یک عبارت جبری می‌نامیم. یک عدد هم یک عبارت جبری محسوب می‌گردد.

مقدار عبارت جبری: هرگاه به جای متغیرهای عبارت‌های جبری اعداد را جایگزین کنیم، عدد به‌دست آمده مقدار عبارت جبری خواهد بود.

مثال

حاصل عبارت جبری $\frac{x^۲-۲xz}{y}+۱$ را به ازای $x=۵$ و $y=۱$ و $z=۳$ بیابید.

پاسخ

در این عبارت جبری y,x و z متغیر هستند چون به جای آن‌ها هر عددی می‌توان قرار داد. در این‌جا $x=۵$ ، $y=۱$ و $z=۳$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{(۵)^۲-۲(۵)(۳)}{۱}+۱=\frac{۲۵-۳۰}{۱}+۱=-۵+۱=-۴$$

یک جمله‌ای‌ها: ساده‌ترین نوع عبارت جبری می‌باشد که از دو قسمت ضریب عددی و عبارت حرفی تشکیل می‌شود. ضریب عددی یک عدد حقیقی می‌باشد. عبارت حرفی، حروف انگلیسی با توان‌های صحیح نامنفی (عدد حسابی) می‌باشند. لذا هر یک‌جمله‌ای به صورت ax^n که $a\in\mathbb{R}$ و $n\in W$.

مثال

عبارت‌های جبری زیر یک جمله‌ای هستند.

$$xy\ ,\ \frac{a^۲b}{۳}\ ,\ -\sqrt{۳}a^۲y^۲z^۳\ ,۵,۳bc^۲y^۳z,-\sqrt{۲}xz,\ \frac{-۶ab^۲}{۷}\ ,\ -۵$$

مثال

عبارت‌های جبری زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$\sqrt{x}y^۳\ ,\ ۲x^۲+y\ ,\ ۳x^۲y^{-۱}\ ,\ \sqrt{x^۲+۱}\ ,\ \frac{x^۲y^۳}{z^۵}\ ,\ \sqrt{x}\ ,\ \frac{۳}{a}$$

تذکر: توان هر متغیر، عددی صحیح و نامنفی است، بنابراین عبارت‌هایی مانند $\frac{۱}{x}$ و $\sqrt{x}$ که توان منفی یا کسری دارند، یک جمله‌ای نیستند و عبارت‌هایی مانند $\sqrt{۲}$ و $\pi x^{۲}$ و ... یک جمله‌ای هستند.

مثال

کدام عبارت زیر یک جمله‌ای است؟

۱) $x^{-۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{x}$ ۳) $x^{\frac{۱}{۲}}$ ۴) $\sqrt{۲}$ ۵) $-\sqrt[۳]{-x}$

پاسخ

گزینه «۴» صحیح است.

مثال

کدام عبارت زیر یک جمله‌ای است؟

۱) $\frac{x}{y}$ ۲) $\frac{۲}{y}$ ۳) $-\sqrt{۵}y$ ۴) $۲\sqrt{x}$ ۵) $۲x^{-۱}$

پاسخ

گزینه «۳» صحیح است.

مثال

کدام گزینه می‌تواند توان متغیر در یک جمله‌ای باشد؟

۱) π ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$ ۵) صفر

پاسخ

گزینه «۵» صحیح است.

بنا به تعریف یک جمله‌ای، توان فقط اعداد حسابی است.

درجه یک جمله‌ای نسبت به یک متغیر: توان متغیر در یک جمله‌ای را درجه یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر گویند.

مثال

$۵x^{۲}y^{۳}$
- نسبت به x از درجه ۲ است
- نسبت به y از درجه۳ است
- نسبت به z و سایر متغیرها از درجه صفر است

نکته

اگر فقط یک متغیر داشته باشیم، برای درجه نیازی به ذکر نام متغیر نیست.

مثال

یک جمله‌ای از درجه ۳ $\leftarrow 5x^3$

یک جمله‌ای‌های متشابه: اگر در چند یک جمله‌ای نمادهای حرفی و توان‌های متناظر آن‌ها یکسان باشند، آن‌ها را متشابه گویند.

مثال

یک جمله‌ای‌های زیر متشابه‌اند.

$$\begin{cases} 5ax^2 \; , \; -7ax^2 \\ 3xy^3 \; , -\frac{2}{3}y^3x \end{cases}$$

مثال

یک جمله‌ای‌های زیر متشابه نیستند.

$$\begin{cases} x^2y^3 \; , x^3y^2 \\ ax \; , axy \end{cases}$$

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها : فقط یک جمله‌ای‌هایی که متشابه باشند را می‌توان جمع و یا تفریق کرد. برای این کار کافی است ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع و یا از هم کم کرد.

مثال

$$5x + 7x = 12x \quad , \quad 5x + 7x \neq 12x^2$$
$$3x + 5y \neq 8xy$$

$5y$ و $3x$ از یک جنس نیستند، لذا متشابه نیستند پس نمی‌توان با هم جمعشان کرد.

ضرب یک جمله‌ای‌ها : برای ضرب کردن یک جمله‌ای‌ها در هم کافی است ضرایب عدد را در هم و نمادهای حرفی(متغیرها) را در هم ضرب کنیم.

مثال

الف) $5x^2 \times (-3)xy^3 = (5)(-3) \times x^2 \times x \times y^3 = -15x^3y^3$

ب) $\sqrt{2}xy \times (-5)x^2y \times \frac{3}{5}y^2 = (\sqrt{2}) \times (-5) \times (\frac{3}{5}) \times x \times x^2 \times y \times y \times y^2 = -3\sqrt{2}x^3y^4$

چند جمله‌ای‌ها: چنان‌چه تعدادی یک جمله‌ای را با یکدیگر جمع یا تفریق کنیم حاصل، چند جمله‌ای است . چند جمله‌ای می‌تواند یک جمله‌ای یا جمع جبری چند یک جمله‌ای غیر متشابه باشد.

مثال

عبارت‌های جبری زیر چندجمله‌ای هستند.

$$۴x^۲-۴x+۱\,,\ x^۲-۲x\,,\ \frac{۲}{۳}ax^۲y-\frac{۳}{۲}axy^۲-axy\,, ۳x^۴\,,\ ۳x^۲y+۵xy^۲+\sqrt{۲}$$

مثال

کدام‌یک چند جمله‌ای است؟

۱) $x+\frac{۱}{x}+۲$

۲) $x^۵+۲\sqrt{x}-۱$

۳) $\sqrt{۵}x-\sqrt{۲}x^۳+۵-۳$

۴) $۲x^۳-۵x^{-۲}+\sqrt{۵}x^۳$

۵) $۴x^{-۳}+۲x^{-۲}+۶$

پاسخ

گزینه «۳» صحیح است.

توان بقیه گزینه‌ها یا کسری است و یا منفی که نادرست است. در چند جمله‌ای باید توان‌ها عدد حسابی باشد.

درجه یک چند جمله‌ای نسبت به یک متغیر: بیشترین توان متغیر در کل چند جمله‌ای را درجه آن چند جمله‌ای گویند.

مثال

$۳x^۳y+۵x+۴y^۷$:
- درجه نسبت به x : ۳
- درجه نسبت به y : ۷

نکته

اگر چند جمله‌ای فقط یک متغیر داشته باشد، ذکر نام آن در تعیین درجه لازم نیست.

مثال

$۵x^۳+۲x+۱\rightarrow$ چند جمله‌ای درجه ۳ است

فرم استاندارد چند جمله‌ای یک متغیره: هرگاه جمله‌های چند جمله‌ای را از بزرگ‌ترین توان تا کوچک‌ترین توان به ترتیب بنویسیم، به فرم استاندارد تبدیل می‌شود.

جمع و تفریق چند جمله‌ای‌ها : باید جملات متشابه را با هم جمع کنیم و یا از هم کم کنیم.

مثال

$$(۵x^۳+۴x^۲+۱)-(x^۳+۲x-۳)=۵x^۳+۴x^۲+۱-x^۳-۲x+۳=۴x^۳+۴x^۲-۲x+۴$$

ضرب دو چند جمله‌ای: برای این کار دو چند جمله‌ای را به صورت دو پرانتز پشت سرهم نوشته و هر کدام از یک جمله‌ای‌های پرانتز اول را در تمام جملات پرانتز دوم ضرب می‌کنیم.

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

۱) $(x^۲+۱)\ (x^۳-۲x+۲)=?$

۲) $(x-۱)(x+۲)=?$

۳) $(xy+۱)\ (x+y-۱)=?$

پاسخ

۱) $(x^۲+۱)\ (x^۳-۲x+۲)=(x^۲)(x^۳)+(x^۲)(-۲x)+(x^۲)(۲)+(۱)(x^۳)+(۱)(-۲x)+(۱)(۲)$

$$=x^۵-۲x^۳+۲x^۲+x^۳-۲x+۲=x^۵-x^۳+۲x^۲-۲x+۲$$

۲) $(x-۱)(x+۲)=x^۲+۲x-x-۲=x^۲+x-۲$

۳) $(xy+۱)\ (x+y-۱)=(xy)(x)+(xy)(y)+(xy)(-۱)+(۱)(x)++(۱)(y)+(۱)(-۱)$

$$=x^۲y+xy^۲-xy-x+y-۱$$

مثال

اگر $A=x(x+۲)$ و $B=(x-۲)(x+۴)$ باشد، حاصل $A-B$؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰ ۵) ۷

پاسخ

گزینه «۳» صحیح است.

$A=x(x+۲)=x^۲+۲x$

$B=(x-۲)(x+۴)=x^۲+۴x-۲x-۸=x^۲+۲x-۸$

$A-B=x^۲+۲x-(x^۲+۲x-۸)=\cancel{x^۲}+\cancel{۲x}-\cancel{x^۲}-\cancel{۲x}+۸=۸$

مثال

از مستطیلی به ابعاد $x+۳$ و $x+۵$ یک مستطیل دیگر به ابعاد $x-۱$ ، $x+۴$ را حذف کرده‌ایم، مساحت باقی‌مانده کدام است؟

۱) $۴x+۱۷$ ۲) $۵x+۱۷$ ۳) $۴x+۱۹$ ۴) $۵x+۱۹$ ۵) ۱۹

پاسخ

گزینه (۴) صحیح است.

مساحت مستطیل اول = طول × عرض $=(x+5)(x+3)=x^2+8x+15$

مساحت مستطیل دوم $=(x-1)(x+4)=x^2+3x-4$

تفاضل مساحت‌ها $=x^2+8x+15-(x^2+3x-4)=x^2+8x+15-x^2-3x+4=5x+19$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $3x^5+2x^4-\frac{1}{2}x^5+4x^5-4x^4=?$

۲) $2x^5\div 8x^7=?$

۳) $(4x^5)(2x^4)=?$

۴) $(2x^3)^5=?$

پاسخ

۱) $3x^5-\frac{1}{2}x^5+4x^5+2x^4-4x^4=(3-\frac{1}{2}+4)x^5+(2-4)x^4=\frac{13}{2}x^5-2x^4$

۲) $2x^5\div 8x^7=\frac{2x^5}{8x^7}=\frac{2}{8}\times\frac{x^5}{x^7}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}x^{-2}$

۳) $(4x^5)(2x^4)=(4\times 2)(x^5\times x^4)=8x^9$

۴) $(2x^3)^5=2^5(x^3)^5=2^5\times x^{15}=32x^{15}$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(3x^2+2x^5-3)+(4x^2+5x^4-x^5+8)=?$

ب) $(2x^7+4x^5-x+6)-(x^7+2x^5)+(x+2)=?$

پ) $(x^2+3)(x-1)=?$

پاسخ

الف) $3x^2+4x^2+2x^5-x^5+5x^4+8-3=7x^2+x^5+5x^4+5=x^5+5x^4+7x^2+5$

ب) $2x^7+4x^5-x+6-x^7-2x^5+x+2=(2-1)x^7+(4-2)x^5+(-1+1)x+6+2$

$=x^7+2x^5+0\times x+8=x^7+2x^5+0+8=x^7+2x^5+8$

پ) $(x^2+3)(x-1)=(x^2\times x)+(x^2)(-1)+(3)(x)+3(-1)=x^3-x^2+3x-3$

مثال

حاصل عبارت $2(m^2n^3)^6+3(m^6n^9)^2$ چیست؟

پاسخ

$2(m^2n^3)^6+3(m^6n^9)^2=2(m^2)^6(n^3)^6+3(m^6)^2(n^9)^2=2m^{12}n^{18}+3m^{12}n^{18}=5m^{12}n^{18}$

مثال

حاصل‌ضرب $(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)$ را بیابید.

پاسخ

از خاصیت بخش‌پذیری استفاده می‌کنیم:

$(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)=(x^4)(x)+(x^4)(1)+(-x^3)(x)+(-x^3)(1)+(x^2)(x)$
$+(x^2)(1)+(-x)(x)+(-x)(1)+(1)(x)+(1)(1)=x^5+\underbrace{x^4-x^4}_{0}\underbrace{-x^3+x^3}_{0}$
$+\underbrace{x^2-x^2}_{0}\underbrace{-x+x}_{0}+1=x^5+1$

مثال

حاصل عبارت x^5+1 به ازای $x=1$ و $x=-1$ چقدر است؟

پاسخ

$x=1$ قرار می‌دهیم:

$(1)^5+1=1+1=2$

$x=-1$ قرار می‌دهیم:

$(-1)^5+1=-1+1=0$

مثال

مقدار عددی عبارت $(a-b)(a^۲+۳ab-۴b^۲)$ به ازای $a=۲$ ، $b=-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۲ ‏ ‏ ‏ ۲) ۱- ‏ ‏ ‏ ۳) ۱ ‏ ‏ ‏ ۴) $\frac{۳}{۲}$ ‏ ‏ ‏ ۵) صفر

پاسخ

گزینه (۵) صحیح است.

در عبارت سوال $a=۲$ و $b=-\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$(۲-(-\frac{۱}{۲}))(۲^۲+۳(۲)(-\frac{۱}{۲})-۴(-\frac{۱}{۲})^۲)=(۲+\frac{۱}{۲})(\underbrace{۴-۳-۱}_{۰})=$$

$$\frac{۵}{۴}\times ۰=۰$$

مثال

حاصل عبارت $(x^۲-۵xy+۶y^۲)(x-۳y)$ به ازای $x=\frac{۱}{۲}$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ چقدر است؟

۱) ۴ ‏ ‏ ‏ ۲) ۶ ‏ ‏ ‏ ۳) $\frac{۱۱}{۲}$ ‏ ‏ ‏ ۴) $\frac{۹}{۲}$ ‏ ‏ ‏ ۵) ۲

پاسخ

گزینه (۲) صحیح است.

$x=\frac{۱}{۲}$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ قرار می‌دهیم.

$$((\frac{۱}{۲})^۲-۵(\frac{۱}{۲})(-\frac{۱}{۲})+۶(-\frac{۱}{۲})^۲)(\frac{۱}{۲}-۳(-\frac{۱}{۲}))=(\frac{۱}{۴}+۵\times\frac{۱}{۴}+۶\times\frac{۱}{۴})(\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲})$$

$$=(\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۴}+\frac{۶}{۴})\times\frac{۴}{۲}=(\frac{۶}{۴}+\frac{۶}{۴})\times ۲=\frac{۱۲}{۴}\times ۲=۶$$

اتحاد

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌گویند.

مثال

کدام‌یک از عبارت‌های زیر، اتحاد است؟

الف) $(x-۱)^۲ = x^۲ - ۴x - ۵$

ب) $(۲x-۳)^۲ = ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$

پاسخ

الف) اتحاد نیست، چون برای هر xای درست نیست و فقط برای $x = -۳$ برقرار است.

$$(x-۱)^۲ = (x-۱)(x-۱) = \underbrace{\cancel{x^۲} - ۲x + ۱}_{\text{حاصل طرف چپ}} = \underbrace{\cancel{x^۲} - ۴x - ۵}_{\text{حاصل طرف راست}}$$

$$-۲x + ۴x = -۵ - ۱ \rightarrow ۲x = -۶ \rightarrow x = -۳$$

ب) اتحاد است چون به ازای هر xای برقرار است.

$$(۲x-۳)^۲ = (۲x-۳)(۲x-۳) = ۴x^۲ - ۱۲x + ۹$$

مثال

مقادیر b, a و c را طوری مشخص کنید که تساوی زیر یک اتحاد باشد.

$$ax^۲ + (b-۱)x + ۲c = ۵x^۲ + ۸x + ۴$$

پاسخ

برای برقرار ماندن تساوی باید ضرایب مساوی باشند. پس:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۵ \\ b-۱ = ۸ \\ ۲c = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۵ \ , b = ۹ \ , c = ۲$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

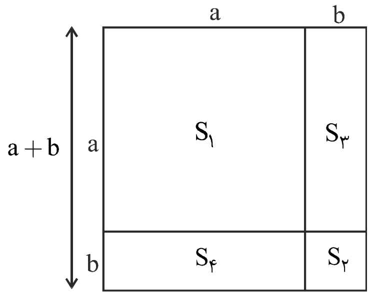
$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

مثال

با رسم شکل اتحادهای بالا را نشان دهید.

پاسخ



$(a+b)(a+b)=(a+b)^2 =$ مساحت کل شکل = طرف چپ اتحاد

حالا برای محاسبه‌ی طرف راست اتحاد مربع دو جمله‌ای، S_1, S_2, S_3 و S_4 را با هم جمع می‌کنیم مجموع آن‌ها باز هم مساحت مربع کل را نشان می‌دهد.

طرف راست = مساحت کل شکل $= S_1+S_2+S_3+S_4 = a^2+b^2+ba+ab = a^2+b^2+ab+ab$

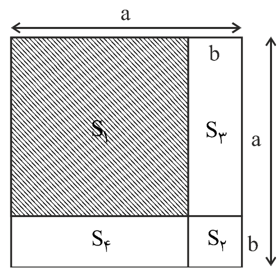
$= a^2+b^2+2ab = a^2+2ab+b^2$

لذا چون مساحت مربع با هر دو روش جواب یکسان دارد پس:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

حال می‌خواهیم $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ را با شکل ثابت کنیم.

مساحت S_1 یا قسمت هاشور زده شده را حساب می‌کنیم:



روش اول $=(a-b)(a-b)=(a-b)^2$

روش دوم برای محاسبه S_1 $=$ مساحت مربع بزرگ $-S_2-S_3-S_4$

$= a^2-b^2-b(a-b)-(a-b)(b) = a^2-b^2-ba+b^2-ab+b^2 =$

$= a^2-2ab+b^2$

$\rightarrow (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(2x+1)^2 = ?$

ب) $(x^2-\frac{1}{2})^2 = ?$

ج) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2 = ?$

د) $(5-2\sqrt{2})^2 = ?$

ر) $(4a+3b)^2 = ?$

ز) $(2xy-\frac{1}{2}x^3)^2 = ?$

پاسخ

الف) $(۲x+۱)^۲=(۲x)^۲+۲(۲x)(۱)+(۱)^۲=۲^۲x^۲+۲\times۲x\times۱+۱^۲=۴x^۲+۴x+۱$

ب) $(x^۲-\frac{۱}{۲})^۲=(x^۲)^۲-۲(x^۲)(\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲})^۲=x^۴-۲\times x^۲\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=x^۴-۲\times\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۴}=x^۴-x^۲+\frac{۱}{۴}$

ج) $(\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳})^۲=(\sqrt{۲})^۲+۲(\sqrt{۲})(۳\sqrt{۳})+(۳\sqrt{۳})^۲=۲+۶\sqrt{۶}+۹\times۳$

$=۲+۶\sqrt{۶}+۲۷=۲۹+۶\sqrt{۶}$

د) $(۵-۲\sqrt{۲})^۲=۵^۲-۲(۵)(۲\sqrt{۲})+(۲\sqrt{۲})^۲=۲۵-۲۰\sqrt{۲}+۸=۳۳-۲۰\sqrt{۲}$

ر) $(۴a+۳b)^۲=(۴a)^۲+۲(۴a)(۳b)+(۳b)^۲=۱۶a^۲+۲۴ab+۹b^۲$

ز) $(۲xy-\frac{۱}{۲}x^۳)^۲=(۲xy)^۲-۲(۲xy)(\frac{۱}{۲}x^۳)+(\frac{۱}{۲}x^۳)^۲=۲^۲x^۲y^۲-۲\times۲xy\times\frac{۱}{۲}x^۳+(\frac{۱}{۲})^۲(x^۳)^۲$

$=۴x^۲y^۲-۲\times۲\times\frac{۱}{۲}\times x\times x^۳\times y+\frac{۱}{۴}x^۶=۴x^۲y^۲-۲x^۴y+\frac{۱}{۴}x^۶$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای بیابید.

$۱۰۰۱^۲=?$

$۱۹۹۹^۲=?$

پاسخ

$۱۰۰۱^۲=(۱۰۰۰+۱)^۲=(۱۰۰۰)^۲+۲(۱۰۰۰)(۱)+۱^۲=۱۰۰۰۰۰۰+۲۰۰۰+۱=۱۰۰۲۰۰۱$

$۱۹۹۹^۲=(۲۰۰۰-۱)^۲=(۲۰۰۰)^۲-۲(۲۰۰۰)(۱)+۱^۲=۴۰۰۰۰۰۰-۴۰۰۰+۱=۳۹۹۶۰۰۱$

مثال

حاصل عبارت $(\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}})^۲-x^{-۱}(x^۲+۱)$ برابر است با: $(x>۰)$

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۱ ۵) ۲

پاسخ

گزینه (۵) صحیح است.

از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$(\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}})^۲=(\sqrt{x})^۲+۲(\sqrt{x})(\frac{۱}{\sqrt{x}})+(\frac{۱}{\sqrt{x}})^۲=x+\frac{۲\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{x}=x+۲+\frac{۱}{x}$

$x^{-۱}(x^۲+۱)=x^{-۱+۲}+x^{-۱}\times۱=x^۱+x^{-۱}=x+\frac{۱}{x}$

$\Rightarrow(\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}})^۲-x^{-۱}(x^۲+۱)=x+۲+\frac{۱}{x}-(x+\frac{۱}{x})=\cancel{x}+۲+\cancel{\frac{۱}{x}}-\cancel{x}-\cancel{\frac{۱}{x}}=۲$

مثال

اگر $x+\frac{1}{x}=۲$ باشد، حاصل $x^۲+\frac{1}{x^۲}$ چقدر است؟

پاسخ

هر دو طرف عبارت $x+\frac{1}{x}=۲$ را به توان ۲ می‌رسانیم با کمک گرفتن از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$x+\frac{1}{x}=۲\rightarrow(x+\frac{1}{x})^۲=۲^۲\rightarrow x^۲+۲x\times\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^۲=۴$$

$$\rightarrow x^۲+۲+\frac{1}{x^۲}=۴\rightarrow x^۲+\frac{1}{x^۲}=۴-۲=۲$$

مثال

اگر $a+b=۵$ و $ab=۶$ باشد، حاصل $a^۲+b^۲$ را بیابید.

پاسخ

به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ داریم:

$$(a+b)^۲=۵^۲\rightarrow a^۲+۲(\underbrace{ab}_{۶})+b^۲=۵^۲$$

$$\rightarrow ۵^۲=a^۲+b^۲+۱۲\rightarrow a^۲+b^۲=۲۵-۱۲=۱۳$$

مثال

نشان دهید $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$.

پاسخ

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و از اتحاد مربع دو جمله‌ای کمک می‌گیریم.

$$(\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}})^۲=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲\rightarrow ۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۲})^۲+۲\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}+(\sqrt{۳})^۲$$

$$۵+۲\sqrt{۶}=۲+۲\sqrt{۶}+۳$$

$$۵+۲\sqrt{۶}=۵+۲\sqrt{۶}$$

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اتحاد مزدوج:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(x+2)(x-2)=?$

ب) $(2x-1)(2x+1)=?$

پاسخ

به کمک اتحاد مزدوج داریم:

الف) $\underbrace{(x+2)(x-2)}_{(a+b)(a-b)}=x^2-2^2=x^2-4$

ب) $(2x-1)(2x+1)=(2x+1)(2x-1)=(2x)^2-1=4x^2-1$ $\qquad \begin{cases} a=2x\ ,\ b=1 \\ a^2=(2x)^2\ , b^2=1 \end{cases}$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(2x-3y)(2x+3y)=?$

ب) $(2x-y)(2x+y)=?$

ج) $(x^2+1)(1-x^2)=?$

د) $(3a^2-b^2)(6a^2+2b^2)=?$

پاسخ

الف) $(2x-3y)(2x+3y)=(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$ $\qquad \begin{cases} a=2x & b=3y \\ a^2=(2x)^2 & b^2=(3y)^2 \end{cases}$

ب) $(2x-y)(2x+y)=(2x)^2-y^2=4x^2-y^2$ $\qquad \begin{cases} a=2x & b=y \\ a^2=(2x)^2 & b^2=y^2 \end{cases}$

ج) $(x^2+1)(1-x^2)=(1+x^2)(1-x^2)=1^2-(x^2)^2=1-x^4$ $\qquad a=1\ ,\ b=x^2$

د) $(3a^2-b^2)(6a^2+2b^2)$

برای حل این سؤال از عدد ۲ در عبارت $(6a^2+2b^2)$ فاکتور می‌گیریم داریم:

$$6a^2+2b^2=2(3a^2+b^2)$$

بنابراین :

$$(3a^2-b^2)(2(3a^2+b^2))=(3a^2-b^2)(2)(3a^2+b^2)=2(3a^2-b^2)(3a^2+b^2)$$

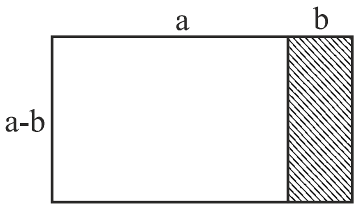
قرار دهید:

$$A=3a^2\ ,\ B=b^2$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$
$$\rightarrow (3a^2-b^2)(6a^2+2b^2)=2[(3a^2)^2-(b^2)^2]=2[9a^4-b^4]=18a^4-2b^4$$

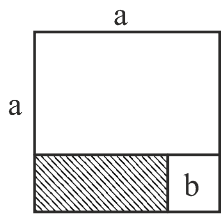
مثال

اتحاد مزدوج را با استفاده از مساحت ثابت کنید. $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$

پاسخ



شکل ۱



شکل ۲

با انتقال قسمت رنگی شکل ۱ و تشکیل شکل ۲ و محاسبه‌ی مساحت آن‌ها ، این اتحاد ثابت می‌گردد.

اتحاد مربع سه جمله‌ای:

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$$

مثال

اتحاد مربع سه جمله‌ای را با استفاده از مساحت ثابت کنید.

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$$

پاسخ

اثبات هندسی: با محاسبه‌ی مساحت مربعی به ضلع $a+b+c$ داریم:

	a	b	c
a	$a^{۲}$	ab	ac
b	ab	$b^{۲}$	bc
c	ac	bc	$c^{۲}$

مساحت مربع = ضلع × ضلع $=(a+b+c)(a+b+c)=(a+b+c)^{۲}$

مساحت مربع = جمع تمام مربع‌های کوچک $=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$

مثال

حاصل عبارت زیر را به کمک اتحاد مربع سه جمله‌ای به‌دست آورید.

$$(x+y-۴)^{۲}=?$$

پاسخ

$$(x+y-۴)^{۲}=x^{۲}+y^{۲}+(-۴)^{۲}+۲(x)(y)+۲(x)(-۴)+۲(y)(-۴)$$
$$=x^{۲}+y^{۲}+۱۶+۲xy-۸x-۸y$$

مثال

حاصل عبارت زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

$$(3x+4-5y)(3x-4+5y)=?$$

پاسخ

$3x$ در هر دو پرانتز یکسان است. از منفی در دو جمله‌ی دیگر در پرانتز سمت راست فاکتور می‌گیریم و آن را تبدیل به اتحاد مزدوج می‌کنیم:

$$(3x+4-5y)(3x-4+5y)=(3x+[4-5y])(3x-[4-5y])=(3x)^2-(4-5y)^2$$
$$=9x^2-(16+25y^2-40y)=9x^2-16-25y^2+40y$$

مثال

به کمک اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) 97^2

ب) 1002×998

پاسخ

الف) $(100-3)^2=100^2-2\times100\times3+3^2=10000-600+9=9409$

ب) $(1000+2)(1000-2)=1000^2-2^2=1000000-4=999996$

اتحاد جمله‌ی مشترک:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

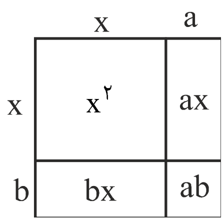
مثال

اتحاد جمله مشترک را با استفاده از مساحت ثابت کنید.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

پاسخ

اثبات هندسی: با محاسبه مساحت مستطیلی به طول و عرض $x+a$ و $x+b$ داریم:



$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $(x+۲)(x+۴)=?$

ب) $(۲x-۱)(۲x+۴)=?$

پاسخ

به کمک اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$ داریم:

الف) $(x+\underset{\substack{\downarrow\\ a}}{۲})(x+\underset{\substack{\downarrow\\ b}}{۴})=x^۲+(۲+۴)x+۲\times۴=x^۲+۶x+۸$

ب) $(۲x-۱)(۲x+۴)=(۲x)^۲+(-۱+۴)(۲x)+(-۱)(۴)=۴x^۲+۶x-۴$

(جمله‌ی $۲x$ مشترک)

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(x-۵)(x+۳)=?$

ب) $(۵x-۶)(۵x+۲)=?$

ج) $(x^۲-۳)(x^۲-۵)=?$

د) $(۳x^۲-۷)(۳x^۲+۱۱)=?$

ر) $(۱۰-x)(۷-x)=?$

ز) $(۲x-۳y)(۲x-۵y)=?$

پاسخ

الف) $(x-۵)(x+۳)=x^۲+(-۵+۳)x+(-۵)\times۳=x^۲-۲x-۱۵$

ب) $(۵x-۶)(۵x+۲)=(۵x)^۲+(-۶+۲)۵x+(-۶)(۲)=۲۵x^۲-۲۰x-۱۲$

ج) $(x^۲-۳)(x^۲-۵)=(x^۲)^۲+(-۳-۵)x^۲+(-۳)(-۵)=x^۴-۸x^۲+۱۵$

د) $(۳x^۲-۷)(۳x^۲+۱۱)=(۳x^۲)^۲+(-۷+۱۱)۳x^۲-۷\times۱۱=۹x^۴+۴\times۳x^۲-۷۷$

$=۹x^۴+۱۲x^۲-۷۷$

ر) $(۱۰-x)(۷-x)=(-x)^۲+(۱۰+۷)(-x)+۱۰\times۷=x^۲-۱۷x+۷۰$

ز) $(۲x-۳y)(۲x-۵y)=(۲x)^۲+(-۳y-۵y)۲x+[(-۳y)(-۵y)]=۴x^۲-۱۶xy+۱۵y^۲$

تجزیه

تجزیه یک عبارت جبری یعنی این‌که آن عبارت را به صورت حاصل‌ضرب دو یا چند عبارت جبری با ضرایب صحیح تبدیل کنیم.

روش‌های تجزیه

۱- فاکتورگیری: این روش اولین روش در تجزیه یک چند جمله‌ای است.

زمانی از این روش استفاده می‌کنیم که در بین جملات چندجمله‌ای داده شده یک عامل مشترک وجود داشته باشد. اگر جملات، ضریب عددی غیر یک داشته باشند، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها عامل مشترک آن‌ها است و در بین متغیرها، حاصل‌ضرب همه متغیرهای مشترک بین یک جمله‌ای‌ها با کمترین توان، عامل مشترک است.

مثال

بین xyz ، $xy^۲$ عامل مشترک xy است. (حاصل ضرب متغیرهای مشترک با کمترین توان)

مثال

بین سه جمله‌ی $۸x^۲, ۲xy$ و $۴x$ عامل مشترک $۲x$ است.

مثال

بین دو جمله‌ی $x^۳z^۲ , x^۲y^۲z$ عامل مشترک $x^۲z$ است.

برای تجزیه از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع استفاده می‌کنیم یعنی:

$ab+ac=a(b+c) \quad \to a$ فاکتورگیری از عامل مشترک

مثال

$x^۲+۲x$ را تجزیه کنید.

پاسخ

عامل مشترک x است. با فاکتورگیری از x داریم:

$$x^۲+۲x=x(x+۲)$$

مثال

چند جمله‌ای $۴x^۳+۸x^۲y$ را تجزیه کنید.

پاسخ

عامل مشترک $4x^2$ است، پس داریم:

$$4x^3+8x^2y=4x^2(x+2y)$$

$$\frac{4x^3}{4x^2}=x\ ,\ \frac{8x^2y}{4x^2}=2y \qquad \text{ب.م.م}\ (4,8)=4$$

مثال

چند جمله‌ای $2x^2y+4xyz+6xy^2$ را تجزیه کنید.

پاسخ

$$\text{ب.م.م}(2,4,6)\ =2$$

عامل مشترک هر سه $2xy$ است، لذا از $2xy$ فاکتور می‌گیریم و هر سه را بر $2xy$ تقسیم می‌کنیم و حاصل خارج قسمت آن‌ها را داخل پرانتز می‌نویسیم.

$$2x^2y+4xyz+6xy^2=2xy(x+2z+3y)$$

مثال

عبارت $x(x+1)-y(x+1)$ را تجزیه کنید.

پاسخ

عامل مشترک $(x+1)$ است، لذا از $(x+1)$ فاکتور می‌گیریم.

$$x(x+1)-y(x+1)=(x+1)(x-y)$$

۲- روش دسته‌بندی: گاهی نمی‌توان یک نماد مشترک را از کل عبارت فاکتور گرفت ولی اگر عبارت را به چند دسته‌ی کوچک تقسیم‌بندی کنیم و از هر کدام عبارتی را فاکتور بگیریم در نهایت می‌توان یک عبارت را از کل فاکتور گرفت.

مثال

چند جمله‌ای $ax+ay+2x+2y$ را تجزیه کنید.

پاسخ

$$\underbrace{ax+ay}_{\text{فاکتور از } a}+\underbrace{2x+2y}_{\text{فاکتور از } 2}=\underbrace{a(x+y)+2(x+y)}_{\text{عامل مشترک } (x+y)}=(x+y)(a+2)$$

مثال

چند جمله‌ای $x^2+5ax+xy+5ay$ را تجزیه کنید.

پاسخ

$$\underbrace{x^2+5ax}_{\text{فاکتور از } x}+\underbrace{xy+5ay}_{\text{فاکتور از } y}=\underbrace{x(x+5a)+y(x+5a)}_{\text{عامل مشترک } (x+5a)}=(x+5a)(x+y)$$

مثال

چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^3+2x^2+x+2=?$

ب) $x^2y+xy^2+y^3x+y^4=?$

ج) $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)=?$

د) $2x^2+5x-3=?$

پاسخ

الف) $x^3+2x^2+x+2=x^2(x+2)+(x+2)=(x+2)(x^2+1)$

ب) $x^2y+xy^2+y^3x+y^4=xy(x+y)+y^3(x+y)=(x+y)(xy+y^3)=$

$=(x+y)(y(x+y^2))=(x+y)(y)(x+y^2)=y(x+y)(x+y^2)$

ج) $ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+ac(c-a)$

$=b(a^2-c^2)-b^2(a-c)-ac(a-c)=(a-c)(b(a+c)-b^2-ac))=$

فاکتورگیری از عامل مشترک

$=(a-c)(ba+bc-b^2-ac)=(a-c)(\underbrace{b(a-b)-c(a-b)}_{\text{فاکتورگیری}})=$

$=(a-c)(a-b)(b-c)$

د) $2x^2+\underbrace{5x}_{6x-x}-3=\underbrace{2x^2-x}_{\text{فاکتورگیری از } x}+\underbrace{6x-3}_{\text{فاکتورگیری از ۳}}=x(2x-1)+3(2x-1)=(2x-1)(x+3)$

۳- **استفاده از اتحادها :** اگر در چند جمله‌ای داده شده، عامل مشترکی وجود نداشت سراغ یکی از اتحادها می‌رویم.

مثال

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (اتحاد مربع دو جمله‌ای)

الف) $x^2+10x+25=?$

ب) $4a^2-12a+9=?$

ج) $49b^2+14b+1=?$

د) $48xy-9y^2-64x^2=?$

هـ) $8x^2+8x+2=?$

و) $20x^2-100x+125=?$

پاسخ

اتحادهای مربع دوجمله‌ای به صورت $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ است.

الف) $\underset{\downarrow}{x^2}+10x+25=x^2+2\times5\times x+5^2=(x+5)^2$

$a^2+2ab+b^2 \qquad a=x \;,\; b=5$

$=(a+b)^2$

ب) $4a^2-12a+9=\underset{\downarrow}{(2a)^2}-2\times2a\times3+3^2=(2a-3)^2$

$A^2-2\times A\times B+B^2=(A-B)^2 \qquad A=2a\;,B=3$

ج) $\underset{\downarrow}{49b^2}+\underset{\downarrow}{14b}+\underset{\downarrow}{1}=(7b)^2+2\times7b\times1+1^2=(7b+1)^2$

$A^2 \quad 2AB \quad B^2$

د) $48xy-9y^2-64x^2=\underset{\downarrow}{-}(9y^2-48xy+64x^2)=-(3y-8x)^2$

از منفی فاکتور می‌گیریم تا شبیه اتحاد مربع دو جمله‌ای شود

هـ) $8x^2+8x+2=2(4x^2+4x+1)=2(2x+1)^2$

و) $20x^2-100x+125=5(4x^2-20x+25)=5(2x-5)^2$

مثال

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (اتحاد مزدوج)

الف) $a^2-9=?$

ب) $4x^2-25y^4=?$

ج) $(3x-2)^2-1=?$

د) $(5a-2)^2-(4a-3)^2=?$

هـ) $3x^2-27y^2=?$

و) $4x^4-4=?$

پاسخ

اتحاد مزدوج به صورت $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$ است.

الف) $\underset{\downarrow}{a}^۲-۹=(a+۳)(a-۳)$

$A^۲-B^۲=(A+B)(A-B) \qquad A=a \ , \ B=۳$

ب) $۴\underset{\downarrow}{x}^۲-۲۵\underset{\downarrow}{y}^۴=(۲x+۵y^۲)(۲x-۵y^۲)$

$A^۲ \quad B^۲ \rightarrow A=۲x \ , \ B=۵y^۲$

ج) $(۳x-۲)^۲-۱=\underbrace{(۳x-۲)^۲}_{A^۲}-\underbrace{۱^۲}_{B^۲}=((۳x-۲)+۱)((۳x-۲)-۱)=(۳x-۱)(۳x-۳)$

$A^۲ \ - \ B^۲ \rightarrow A=۳x-۲ \ , \ B=۱$

$=(۳x-۱)(۳)(x-۱)=۳(۳x-۱)(x-۱)$

د) $\underbrace{(۵a-۲)^۲}_{A^۲}-\underbrace{(۴a-۳)^۲}_{B^۲}=(۵a-۲+(۴a-۳))(۵a-۲-(۴a-۳))$

$A^۲ \ - \ B^۲ \ \rightarrow \ A=۵a-۲ \ , \ B=۴a-۳$

$=(۹a-۵)(a+۱)$

هـ) $۳x^۲-۲۷y^۲=۳(x^۲-۹y^۲)=۳(x-۳y)(x+۳y)$

و) $۴x^۴-۴=۴(x^۴-۱)=۴(x^۲-۱)(x^۲+۱)=۴(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)$

مثال

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (اتحاد جمله مشترک)

الف) $x^۲+۵x+۶=?$

ب) $x^۲-۵x+۴=?$

ج) $x^۲-۵x+۴=?$

د) $(a+۳b)^۲-۶(a+۳b)-۷$

هـ) $(x+۲)(x+۳)(x+۵)(x+۴)-۱۲۰=?$

پاسخ

اتحاد جمله مشترک به صورت $(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$ است.

الف) $x^۲+۵x+۶$

باید دو عدد پیدا کنیم که مجموع آن‌ها ۵ و ضرب آن‌ها ۶ باشد. در تجزیه اتحاد جمله مشترک همواره از همین روش استفاده می‌کنیم. آن دو عدد در این‌جا ۲ و ۳ است پس: $a=۲ \ , \ b=۳$

$x^۲+۵x+۶=(x+۲)(x+۳)$

ب) $x^{۲}-۵x+۴$

دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۵- و ضرب آن‌ها ۴ شود. پس $a=-۴\ ,\ b=-۱$ در این صورت داریم:

$$x^{۲}-۵x+۴=(x-۴)(x-۱)$$

ج) $۴a^{۲}+۴a-۱۵=(۲a)^{۲}+۲(۲a)-۱۵$

جمله مشترک $۲a$ است. دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۲ و ضرب آن‌ها -۱۵ شود. دو عدد $+۵$ و ۳- هستند، زیرا $+۵-۳=۲$ و $۵\times(-۳)=-۱۵$ پس داریم:

$$۴a^{۲}+۴a-۱۵=(۲a)^{۲}+۲(۲a)-۱۵=(۲a+۵)(۲a-۳)$$

د) $(a+۳b)^{۲}-۶(a+۳b)-۷=(a+۳b+\bigcirc)(a+۳b+\square)$

به جای $\bigcirc$ و $\square$ باید دو عدد قرار دهیم که جمع آن‌ها ۶- و ضرب آن‌ها ۷- شود. داریم:

$$-۷+۱=-۶\quad,\quad -۷\times(+۱)=-۷$$

پس:

$$(a+۳b)^{۲}-۶(a+۳b)-۷=(a+۳b+۱)(a+۳b-۷)$$

هـ) $(x+۲)(x+۳)(x+۵)(x+۴)-۱۲۰=[\underbrace{(x+۲)(x+۵)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}]\,[\underbrace{(x+۳)(x+۴)}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}]-۱۲۰=$

$$=[x^{۲}+۷x+۱۰][x^{۲}+۷x+۱۲]-۱۲۰=(x^{۲}+۷x)^{۲}+۱۲(x^{۲}+۷x)+۱۰(x^{۲}+۷x)+\cancel{۱۲۰}-\cancel{۱۲۰}$$

$$=(x^{۲}+۷x)^{۲}+۲۲(x^{۲}+۷x)=(\underbrace{x^{۲}+۷x}_{\text{فاکتورگیری از } x})(x^{۲}+۷x+۲۲)=x(x+۷)(x^{۲}+۷x+۲۲)$$

فاکتورگیری از $(x^{۲}+۷x)$

مثال

چندجمله‌ای $x^{۲}-y^{۲}+۲x+۱$ را تجزیه کنید.

پاسخ

$$x^{۲}-y^{۲}+۲x+۱=\underbrace{x^{۲}+۲x+۱}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}-y^{۲}=\underbrace{(x+۱)^{۲}-y^{۲}}_{\text{اتحاد مزدوج}}=(x+۱+y)(x+۱-y)$$

نکته

اگر ضریب x^2 در چند جمله‌ای‌های درجه‌ی ۲، یک نباشد برای تجزیه از روش موسوم به روش A کمک می‌گیریم:

روش A برای تجزیه:

۱. عبارت داده شده را A فرض می‌کنیم.

۲. طرفین تساوی را در ضریب x^2 ضرب می‌کنیم. با این شرایط سه جمله‌ای درجه‌ی دومی حاصل می‌شود.

۳. پس از تجزیه، طرفین تساوی را بر عدد ضرب شده تقسیم می‌کنیم.

مثال

سه جمله‌ای $3x^2 - 7x + 4$ را تجزیه کنید.

پاسخ

گام اول : $A = 3x^2 - 7x + 4$

گام دوم : $3A = 9x^2 - 7(3x) + 12 \Rightarrow 3A = (3x)^2 - 7(3x) + 12$

اتحاد جمله مشترک $3x$ با دو عدد ۴- و ۳- $\longrightarrow$ تجزیه

پس : $3A = (3x-3)(3x-4)$

گام سوم : $\xrightarrow{\text{از ۳ فاکتور می‌گیریم}} \cancel{3}A = \cancel{3}(x-1)(3x-4) \xrightarrow{\div 3} A = (x-1)(3x-4)$

مثال

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^4 + 4 = ?$

ب) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = ?$

ج) $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 = ?$

د) $x^4 - 10x^2 + 9 = ?$

پاسخ

الف) x^4+4

با اضافه کردن $4x^2$ و کم کردن $4x^2$ به عبارت (الف) عملاً تغییری در جواب رخ نمی‌دهد اما این کار باعث می‌شود به اتحاد مربع دو جمله‌ای تبدیل شود. پس:

$$x^4+4=x^4+4+4x^2-4x^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=A^2-B^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$A=(x^2+2)\ ,\ B=2x$$

$$\Rightarrow x^4+4=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$

ب) $a^4+a^2b^2+b^4$

a^2b^2 را اضافه می‌کنیم:

$$a^4+a^2b^2+b^4=a^4+a^2b^2+b^4+a^2b^2-a^2b^2=$$
$$=\underbrace{a^4+2a^2b^2+b^4}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}}-a^2b^2=\underbrace{(a^2+b^2)^2-(ab)^2}_{\text{مزدوج}}=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$

ج) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

$2b^2c^2$ را اضافه و کم می‌کنیم و از اتحادهای مربع سه جمله‌ای زیر کمک می‌گیریم.

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$
$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2+(2b^2c^2-2b^2c^2)$$

$$=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-4b^2c^2+2b^2c^2=\underbrace{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2}_{\text{اتحاد مربع سه جمله‌ای}}-4b^2c^2$$

$$=\underbrace{(a^2-b^2-c^2)-4b^2c^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$$

$$=(a^2-\underbrace{(b^2+c^2-2bc)}_{})(a^2-\underbrace{(b^2+c^2+2ac)}_{})=[\underbrace{a^2-(b-c)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}]\,[\underbrace{a^2-(b+c)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}]$$

تجزیه با اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$=(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)(a-b-c)$$

د) $x^4-10x^2+9=\underbrace{(x^2-9)(x^2-1)}_{\text{اتحاد یک جمله‌ی مشترک}}=\underbrace{(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$

ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند

اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مثال

الف) $(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3(2x)(y)^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

ب) $(x^2-3)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(3) + 3(x^2)(3)^2 - 3^3 = x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27$

مثال

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (اتحاد مکعب دو جمله‌ای)

الف) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = ?$

ب) $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3 = ?$

ج) $x^6 + 15x^4y + 75x^2y^2 + 125y^3 = ?$

د) $1 - 3ab^2 + 3a^2b^4 - a^3b^6 = ?$

پاسخ

اتحادهای مکعب دو جمله‌ای به صورت $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ است.

الف) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x+1)^3$

ب) $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3 = (3a-b)^3$

ج) $x^6 + 15x^4y + 75x^2y^2 + 125y^3 = (x^2+5y)^3$

د) $1 - 3ab^2 + 3a^2b^4 - a^3b^6 = (1-ab^2)^3$

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب دوجمله‌ای (چاق و لاغر):

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مثال

الف) $(\underbrace{3x}_{a}+\underbrace{5y}_{b})(\underbrace{9x^2}_{(3x)^2-}-\underbrace{15xy}_{(3x)(5y)+}+\underbrace{25y^2}_{(5y)^2})=(3x)^3+5y^3$

ب) $(\underbrace{2x^2}_{a}-\underbrace{4}_{b})(\underbrace{4x^4}_{(2x^2)^2}+\underbrace{8x^2}_{(2x^2)\times 4}+\underbrace{16}_{(4)^2})=(2x^2)^3-4^3=8x^6-64$

مثال

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. (اتحاد چاق و لاغر یا مجموع و تفاضل مکعب دو جمله)

الف) $x^3+1=?$

ب) $8a^6-b^6=?$

ج) $27x^3+64=?$

د) $125-x^6y^3=?$

هـ) $a^3+b^3-a^2+ab-b^2=?$

پاسخ

اتحادهای چاق و لاغر به صورت $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ و $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b)^2$ است.

الف) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

$a^3+b^3 \rightarrow a=x \quad , \quad b=1$

ب) $8a^6-b^6=(2a-b)(4a^2+2a^2b^2+b^4)$

$A^3-B^3 \rightarrow A=2a^2 \quad , \quad B=b^2$

ج) $27x^3+64=(3x+4)(9x^2-12x+16)$

$A^3+B^3 \rightarrow A=3x \quad , \quad B=4$

د) $125-x^6y^3=(5-x^2y)(25+5x^2y+x^4y^2)$

$A^3-B^3 \rightarrow A=5 \quad , \quad B=x^2y$

هـ) $a^3+b^3-a^2+ab-b^2=\underbrace{a^3+b^3}_{\text{تجزیه با اتحاد چاق و لاغر}}-(a^2-ab+b^2)=$

$=(a+b)\underbrace{(a^2-ab+b^2)-(a^2-ab+b^2)}_{\text{فاکتورگیری از عامل مشترک}}=(a^2-ab+b^2)(a+b-1)$

مثال

مخرج کسر $\frac{2}{(\sqrt[3]{2}-1)}$ زیر را گویا کنید.

پاسخ

از اتحاد چاق و لاغر $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ کمک می‌گیریم.

صورت و مخرج را در $(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{2\times[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1]}{(\sqrt[3]{2}-1)\times[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1]}=\frac{2\times[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1]}{(\sqrt[3]{2})^3-1^3}=\frac{2\times[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1]}{2-1}=2[(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1]$$

اتحاد اولر: به ازای هر سه عدد حقیقی b,a و c داریم:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

صورت دیگر اتحاد اولر:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]=a^3+b^3+c^3-3abc$$

نکته

اگر $a+b+c=0$ باشد، آن‌گاه $a^3+b^3+c^3=3abc$.

به راحتی این نتیجه از اتحاد اولر با قرار دادن $a+b+c=0$ حاصل می‌شود.

$$\overset{0}{\cancel{(a+b+c)}}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$0=a^3+b^3-c^3-3abc\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

نکته

اگر $a=b=c$ آن‌گاه $a^3+b^3+c^3=3abc$. با قرار دادن $a=b=c$ در طرف چپ اتحاد اولر باز هم طرف چپ صفر می‌شود و داریم:

$$0=a^3+b^3+c^3-3abc\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

مثال

حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $(2x+y+1)(4x^2+y^2+1-2xy-2x-y)=?$

ب) $(a^3-a^2-1)(a^6+a^4+1+a^5+a^3-a^2)=?$

پاسخ

الف) $(۲x+y+۱)(۴x^۲+y^۲+۱-۲xy-۲x-y)$

با کمک اتحاد اولر قرار دادن $a=۲x$ و $b=y$ و $c=۱$ در آن اتحاد داریم:

$$\text{حاصل} =(۲x)^۳+(y)^۳+۱^۳-۳\times ۲x\times y\times ۱=۸x^۳+y^۳+۱-۶xy$$

ب) $(a^۳-a^۲-۱)(a^۶+a^۴+۱+a^۵+a^۳-a^۲)$

$$A=a^۳\ ,B=-a^۲\ \ ,C=-۱\ \rightarrow A^۲=a^۶\ ,\ \ B^۲=a^۴\ \ ,C^۲=۱$$

$$AB=-a^۵\ ,\ \ AC=-a^۳\ \ \ ,BC=a^۲$$

$$\text{حاصل} =A^۳+B^۳+C^۳-۳ABC=a^۹-a^۶-۱-۳a^۵=a^۹-a^۶-۳a^۵-۱$$

مثال

مقدار عددی عبارت $a^۳+b^۳+c^۳$ را به ازای $a=۳+\sqrt{۲}$ و $b=۳-\sqrt{۲}$ و $c=-۶$ حساب کنید.

پاسخ

داریم:

$$a+b+c=۳+\sqrt{۲}+۳-\sqrt{۲}-۶=۰$$

پس طبق نکته بالا $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$. لذا :

$$a^۳+b^۳+c^۳=۳abc=۳\times\underbrace{(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})}_{\text{اتحاد مزدوج}}(-۶)=۳\times(۹-۲)(-۶)=۳\times ۷\times(-۶)=-۱۲۶$$

مثال

معادله $(۱-x)^۳+(۲x+۴)^۳-(x+۵)^۳=۰$ را حل کنید.

پاسخ

معادله را به این شکل تبدیل می‌کنیم:

$$(۱-x)^۳+(۲x+۴)^۳+(-x-۵)^۳=۰$$

اکنون معادله به شکل $A^۳+B^۳+C^۳=۰$ در آمد پس می‌توان از اتحاد اولر و نتایج آن بهره برد.

اما بنا بر نتیجه اتحاد اولر اگر $A+B+C=۰$ آن‌گاه $A^۳+B^۳+C^۳=۳ABC$.

در این‌جا : $A=(۱-x)$, $B=۲x+۴$, $C=-x-۵$

$$A+B+C=(۱-x)+(۲x+۴)+(-x-۵)=\cancel{۱}-\cancel{x}+۲\cancel{x}+\cancel{۴}-\cancel{x}-\cancel{۵}=۰$$

بنابراین:

$$A^۳+B^۳+C^۳=۳ABC\Rightarrow(۱-x)^۳+(۲x+۴)^۳+(-x-۵)^۳=۳(\underbrace{۱-x}_{A})(\underbrace{۲x+۴}_{B})(\underbrace{-x-۵}_{C})=۰$$

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}(۱-x)=۰\rightarrow x=۱\\ ۲x+۴=۰\rightarrow ۲x=-۴\rightarrow x=-۲\\ -x-۵=۰\rightarrow x=-۵\end{cases}$$

مثال

تجزیه کنید. (به کمک اتحاد اولر)

الف) $8x^3+y^3+1-6xy=?$

ب) $a^3+(2-a)^3-8=?$

ج) $(2a-b)^3-(a-b)^3-a^3=?$

پاسخ

الف) $8x^3+y^3+1-6xy=(\underset{\substack{\downarrow\\A}}{2x}+\underset{\substack{\downarrow\\B}}{y}+\underset{\substack{\downarrow\\C}}{1})(4x^2+y^2+1-2xy-2x-y)$

$\to A^2=4x^2\ ,\ B^2=y^2\ ,\ C^2=1$

ب) $a^3+(2-a)^3-8$

بنا به حالت خاص اگر $a+b+c=0$ آنگاه $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$A=a\ ,B=2-a\ ,C=-2\to A+B+C=0$

حاصل $=3ABC=3a(2-a)(-2)=6a(a-2)$

ج) $(2a-b)^3-(a-b)^3-a^3=(2a-b)^3+(b-a)^3+(-a)^3$

مجدداً از همان نکته استفاده می‌کنیم:

$(\underset{\substack{\downarrow\\A}}{2a-b})+(\underset{\substack{\downarrow\\B}}{b-a})+(\underset{\substack{\downarrow\\C}}{-a})=0$

$A+B+C=0\to A^3+B^3+C^3=3ABC$

حاصل $=3(2a-b)(b-a)(-a)=3a(2a-b)(a-b)$

اتحاد تفاضل مرتبه n ام دو جمله‌ای : به ازای هر a و b حقیقی داریم:

$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})=a^n-b^n$

مثال

$(2a-2)(16a^4+16a^3+16a^2+16a+16)=(2a)^5-2^5=32a^5-32$

مثال

تجزیه کنید. (به کمک اتحاد تفاضل مرتبه n ام دو جمله‌ای)

$a^5-1=?$

پاسخ

$$a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$$

اتحاد مجموع مرتبه‌ی nام دو جمله‌ای: هرگاه n فرد باشد، داریم:

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1})=a^n+b^n$$

مثال

$$(2a+3b)(16a^4-24a^3b+36a^2b^2-54ab^3+81b^4)=(2a)^5+(3b)^5=32a^5+243b^5$$

مثال

تجزیه کنید. (به کمک اتحاد مجموع مرتبه nام دو جمله‌ای)

$$a^5+32=?$$

پاسخ

$$a^5+32=a^5+2^5=(a+2)(a^4-2a^3+4a^2-8a+16)$$

اتحاد بسط دو جمله‌ای نیوتن: فرض کنید $a>b\in\mathbb{R}$ و $n\in W$ در این صورت داریم:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\dots+b^n$$

$$(a-b)^n=a^n-\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\dots+(-1)^nb^n$$

در این اتحاد $n!=n\times(n-1)\times\dots\times1$ و $n\in\mathbb{N}$.

مثال

الف) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

ب) $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

ج) $(2a+b)^5=(2a)^5+\frac{5}{1!}(2a)^{5-1}b+\frac{5\times4}{2!}(2a)^{5-2}b^2+\frac{5\times4\times3}{3!}(2a)^{5-3}b^3$

$$+\frac{5\times4\times3\times2}{4!}(2a)^{5-4}b^4+b^5=(2a)^5+5(2a)^4b+10(2a)^3b^2+10(2a)^2b^3+5(2a)^1b^4+b^5$$
$$=32a^5+80a^4b+80a^3b^2+40a^2b^3+10ab^4+b^5$$

نکته

۱) مجموع ضرایب در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ برابر 2^n است چون کافی است به جای $a=1$ و $b=1$ قرار دهید.

۲) مجموع ضرایب در بسط دو جمله‌ای $(a-b)^n$ برابر صفر است چون کافی است به جای $a=1$ و $b=1$ قرار دهید.

داریم:

$$(1-1)^n = 0 = 1^n - \frac{n}{1!}(1)^{n-1}\times 1 + \frac{n(n-1)}{2!}(1)^{n-2}(1)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(1)^{n-3}(1)^3 + \dots + (-1)^n(1)^n$$

$$= 1 - \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots + (-1)^n = 0$$

مثلث خیام: برای به‌دست آوردن ضرایب هر کدام از جملات یک اتحاد دو جمله ای با توان n از مثلث خیام با دستور زیر استفاده می‌کنیم.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & + & 1 & & & & \\
 & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & & \\
 & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & \\
 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & &
\end{array}
$$

$\rightarrow (a+b)^0 = 1$

$\rightarrow (a+b)^1 = 1a + 1b$

$\rightarrow (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$\rightarrow (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$\rightarrow (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$\rightarrow (a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

نکته

اگر علامت بین دو جمله اتحاد منفی باشد، ضرایب یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند (اولی مثبت و دومی منفی، سومی مثبت ، چهارمی منفی و ...)

$(a-b)^4 = 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$

مثال

بسط عبارت $(x^3-2)^5$ را نوشته و مجموع ضرایب آن را بیابید.

پاسخ

$$(x^3-2)^5 = (x^3)^5 - 5(x^3)^4\times 2 + 10(x^3)^3\times 2^2 - 10(x^3)^2\times 2^3 + 5x^3\times 2^4 - 2^5$$

$$= x^{15} - 10x^{12} + 40x^9 - 80x^6 + 80x^3 - 32$$

مجموع ضرایب:
- روش مستقیم $1-10+40-80+80-32=-1$
- $x=1$ قرار دهید : $(1-2)^5 = (-1)^5 = -1$

مثال

در بسط عبارت $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3})^5$ مقدار جمله گویا چقدر می‌شود؟

پاسخ

در بسط عبارت $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3})^5$ مجموع توان‌ها همواره برابر ۵ است. پس در جمله‌ی گویا توان $\sqrt{3}$ باید ۲ و تـوان $\sqrt[3]{3}$ بایـد ۳ باشد.

$$(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3})^5=\underset{\downarrow}{(\sqrt{3})^5}+\underset{\downarrow}{5(\sqrt{3})^4\sqrt[3]{3}}+\underset{\downarrow}{10(\sqrt{3})^3(\sqrt[3]{3})^2}+\underset{\downarrow}{10(\sqrt{3})^2(\sqrt[3]{3})^3}+\underset{\downarrow}{5(\sqrt{3})(\sqrt{3})^4}+\underset{\downarrow}{(\sqrt[3]{3})^5}$$

گویا نیست   گویا نیست   گویا است   گویا نیست   گویا نیست   گویا نیست

$$10(\sqrt{3})^2(\sqrt[3]{3})^3=10\times 3\times 3=90$$

درس سوم: نابرابری‌ها و نامعادله‌ها

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، برای مقایسه‌ی آن‌ها از نمادهای نامساوی استفاده می‌کنیم.

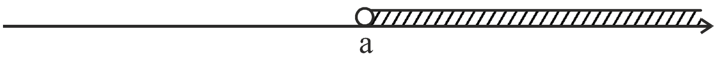
مثال

۱۰ و ۲۰ دو عدد حقیقی می‌باشند. $۲۰ > ۱۰$ می‌گوییم ۱۰ کوچک‌تر است از ۲۰.

لذا اگر $b > a$ می‌گوییم a بزرگ‌تر از b است. اگر $a \geq b$ می‌گوییم a بزرگ‌تر یا مساوی b است.

تمامی نابرابری‌ها را روی محور اعداد حقیقی می‌توان نشان داد:

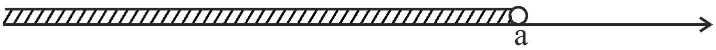
تمام اعداد بزرگ‌تر از a: $x > a$



مثال

تمام اعداد بزرگ‌تر از $\sqrt{۲}$: $x > \sqrt{۲}$

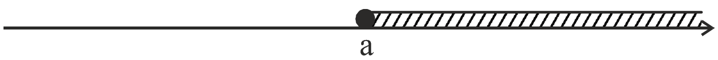
تمام اعداد کوچک‌تر از a: $x < a$



مثال

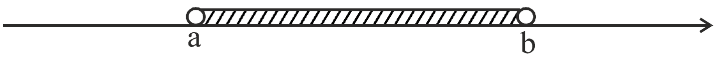
تمام اعداد کوچک‌تر از ۱: $x < ۱$

تمام اعداد بزرگ‌تر یا مساوی a: $x \geq a$

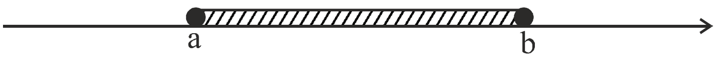


تمام اعداد کوچک‌تر یا مساوی a: $x \leq a$

تمام اعداد بزرگ‌تر از a و کوچک‌تر از b (اعداد بین a, b): $a < x < b$



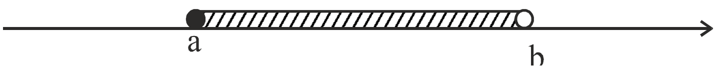
اعداد بزرگ‌تر یا مساوی a و کوچک‌تر یا مساوی b: $a \leq x \leq b$



مثال

اعداد بزرگ‌تر یا مساوی $-\sqrt{۷}$ و کوچک‌تر یا مساوی ۵: $-\sqrt{۷} \leq x \leq ۵$

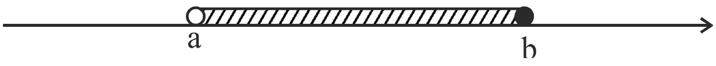
اعداد بزرگ‌تر یا مساوی a و کوچک‌تر از b: $a \leq x < b$



مثال

اعداد بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ و کوچک‌تر از ۱ : $\frac{۱}{۲} \leq x < ۱$

اعداد بزرگ‌تر از a و کوچک‌تر یا مساوی b : $a < x \leq b$

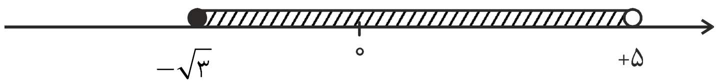


توجه: هر موقع علامت مساوی زیر نامساوی بود یعنی $\leq$ و یا $\geq$ باید روی محور دایره توپر کشید و هر وقت علامت مساوی نداشت $(< >)$ باید دایره‌ی تو خالی کشید.

مثال

اعداد بزرگ‌تر یا مساوی $-\sqrt{۳}$ و کوچک‌تر از ۵ را روی محور نشان دهید.

پاسخ



نکته

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a > b$ یا $b < a$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند $p > ۰$ وجود دارد به طوری که $a = b + p$.

مثال

برای تساوی‌های مقابل یک نابرابری بنویسید.

۱) $a - ۱ = b + ۱$

۲) $۸t = ۵u$

پاسخ

۱) $a - ۱ = b + ۱ \rightarrow a = b + ۲ \rightarrow a > b$ یا $b < a$

۲) $۸t = ۵u \rightarrow t = \frac{۵}{۸}u \rightarrow t < u$ یا $u > t$

خواص نابرابری‌ها:

الف) به دو طرف یک نامساوی می‌توانیم یک عدد را اضافه و یا از دو طرف آن یک عدد را کم کنیم. در این حالت جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

$$a>b \rightarrow a+c>b+c \quad , \quad a>b \rightarrow a-c>b-c$$

مثال

$$-۴<۷ \xrightarrow{+۵} -۴+۵<۷+۵ \rightarrow ۱<۱۲$$
$$-۴<۷ \xrightarrow{-۵} -۴-۵<۷-۵ \rightarrow -۹<۲$$

ب) دو طرف یک نامساوی را می‌توانیم در یک عدد مثبت ضرب و یا بر یک عدد مثبت تقسیم کنیم. در این حالت جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

$$a>b\ ,\ c>۰ \rightarrow ac>bc$$
$$a>b,c>۰ \rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$$

مثال

$$-۳<۳ \xrightarrow{\times ۲} -۳\times۲<۳\times۲ \rightarrow -۶<۶$$
$$-۳<۳ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۳}{۲}<\frac{۳}{۲}$$

ج) دو طرف یک نامساوی را می‌توانیم در یک عدد منفی ضرب و یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم. در این حالت جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$$a>b\ ,\ c<۰ \rightarrow ac<bc$$
$$a>b,c<۰ \rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$$

مثال

$$۲>-۲\ ,\ -۳<۰ \rightarrow ۲\times(-۳)<(-۲)\times(-۳) \rightarrow -۶<+۶$$
$$-۴<-۱\ ,\ -۲<۰ \rightarrow \frac{-۴}{-۲}>\frac{-۱}{-۲} \rightarrow ۲>\frac{۱}{۲}$$

نامعادله: اگر در یک نامساوی، مجهولی مانند x وجود داشته باشد به آن نامساوی، نامعادله می‌گوییم.

مثال

$x-۲<۱$ ، $x^{۲}+۳>x$ و $۵x-۲<۷$ نامعادله هستند.

برای حل نامعادله مانند حل معادله عمل می‌کنیم فقط برای تقسیم طرفین نامعادله به عدد باید دقت داشت که جهت نامعادله تغییر می‌کند یا خیر. آخر کار می‌توانیم جواب نامعادله را روی محور نشان دهیم.

مثال

نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب نامعادله را روی محور نشان دهید.

الف) $2x+7\geq 15$

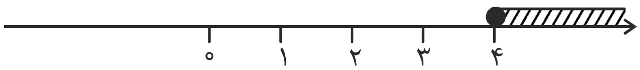
ب) $-4x>5$

ج) $4x-1\geq 2x+3$

پاسخ

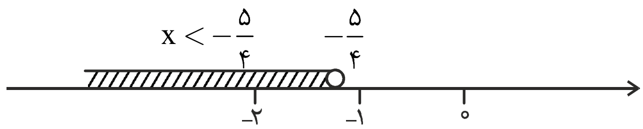
الف) $2x+7\geq 15 \rightarrow 2x\geq 15-7 \rightarrow 2x\geq 8 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را بر ۲}} x\geq \frac{8}{2} \rightarrow x\geq 4$

چون طرفین را بر عدد مثبت ۲ تقسیم کرده‌ایم، جهت نامساوی تغییری نمی‌کند.



ب) $-4x>5 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را بر ۴-}} \frac{-4}{-4}x<\frac{5}{-4} \rightarrow x<\frac{-5}{4}$

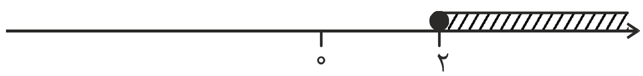
چون طرفین را بر ۴- که عددی منفی است تقسیم کرده‌ایم، بنابراین جهت نامساوی عوض می‌شود.



ج) $4x-1\geq 2x+3 \xrightarrow[\text{طرفین کم می‌کنیم}]{2x\ \text{را از}} 4x-1-2x\geq \cancel{2x}+3-\cancel{2x}$

$2x-1\geq 3 \xrightarrow[\text{طرفین اضافه می‌کنیم}]{\text{۱+ را به}} 2x-1+1\geq 3+1 \rightarrow 2x\geq 4 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین را بر ۲}} \frac{2}{2}x\geq \frac{4}{2} \rightarrow x\geq 2$

چون طرفین نامساوی را بر عدد مثبت $(+2)$ تقسیم کردیم، جهت نامساوی تغییر نکرد.



توجه: برای حل نامعادلات می‌توانیم جمله‌های شامل متغیر را به یک طرف نامساوی و بقیه‌ی جمله‌ها را به طرف دیگر نامساوی منتقل کنیم و سپس با توجه به خواص تقسیم نامساوی بر یک عدد، طرفین نامساوی را بر ضریب x تقسیم کنیم. به این ترتیب مجموعه جواب نامعادله تعیین می‌شود.

مثال

مجموعه جواب نامعادله $۲x-۵>۴x+۲$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$۲x-۵>۴x+۲\to ۲x-۴x>۲+۵\to -۲x>۷\xrightarrow{\div(-۲)}\to x<\frac{-۷}{۲}$$

مثال

مجموعه جواب نامعادله $\frac{۴x+۱}{۳}>\frac{۲x+۳}{۲}-\frac{۳}{۴}$ را پیدا کنید.

پاسخ

در موارد شبیه به این، ابتدا دو طرف نامعادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک کسرها ضرب می‌کنیم. پس در این جا در ک.م.م ۲، ۳ و ۴ ضرب می‌کنیم.

ک.م.م $(۲,۳,۴)=۱۲$

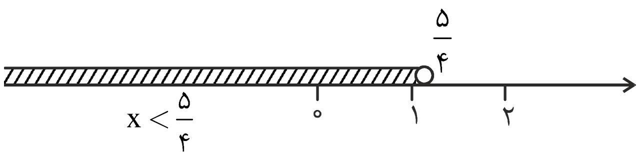
پس دو طرف نامعادله را در ۱۲+ ضرب می‌کنیم که مخرج‌ها از بین بروند. جهت نابرابری تغییر نمی‌کند.

$$۱۲(\frac{۲x+۳}{۲}-\frac{۳}{۴})>۱۲(\frac{۴x+۱}{۳})$$

$$۶(۲x+۳)-۹>۴(۴x+۱)\to ۱۲x+۱۸-۹>۱۶x+۴$$

$$\to ۱۲x+۹>۱۶x+۴\to ۱۲x-۱۶x>۴-۹\to -۴x>-۵$$

$$\xrightarrow[\text{جهت عوض می-}]{\div(-۴)}\frac{-۴}{-۴}x<\frac{-۵}{-۴}\to x<+\frac{۵}{۴}$$



مثال

نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۳}{۴}x-۲\geq\frac{۱}{۲}x$

ب) $\frac{-۲}{۵}x-\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۱۰}x$

پاسخ

الف) $\frac{۳}{۴}x-۲\geq\frac{۱}{۲}x \rightarrow ۴\times(\frac{۳}{۴}x-۲\geq\frac{۱}{۲}x)\rightarrow ۳x-۸\geq ۲x\rightarrow ۳x-۲x\geq ۸\rightarrow x\geq ۸$

ب) $\frac{-۲}{۵}x-\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۱۰}x \xrightarrow[\text{جهت عوض نمی‌شود}]{\text{طرفین ضرب در ۲۰}} ۲۰\times(\frac{-۲}{۵}x-\frac{۱}{۲})<۲۰\times(\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۱۰}x)$

$\rightarrow -۸x-۱۰<۱۵+۱۴x\rightarrow -۸x-۱۴x<۱۵+۱۰\rightarrow -۲۲x<۲۵$

$\xrightarrow[\text{جهت عوض می-شود}]{\div(-۲۲)} x>\frac{۲۵}{-۲۲}$

مثال

علامت عددهای a ، b و c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشند.

الف) $\frac{ab}{c}>۰$ ب) $\frac{a^۲}{bc}<۰$

پاسخ

الف) این کسر به حالت‌های زیر مثبت می‌شود:

۱) $a>۰\ ,\ b>۰\ ,\ c>۰$

۲) $a<۰\ ,b<۰\ ,c>۰$

۳) $a<۰\ ,\ b>۰,\ c<۰$

۴) $a>۰\ ,\ b<۰\ ,\ c<۰$

ب) صورت کسر $a^۲$ همیشه مثبت است، چون توان دوم هر عددی همواره مثبت است. پس باید کاری کرد تا مخرج منفی گردد.

۱) $a>۰\ ,\ b>۰\ ,\ c<۰$

۲) $a>۰\ ,\ b<۰\ ,c>۰$

۳) $a<۰\ ,b>۰\ ,\ c<۰$

۴) $a<۰\ ,\ b<۰\ ,c>۰$

ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند

دستگاه نامعادلات یک مجهولی: یک دستگاه نامعادلات یک مجهولی شامل چند نامعادله است که برای حل آن ابتدا هر یک از نامعادلات دستگاه را حل می‌کنیم تا جواب هر یک به‌دست آید. سپس جواب مشترک همه‌ی نامعادلات را پیدا می‌کنیم که این جواب همان جواب خواسته شده‌ی دستگاه است.

مثال

دستگاه نامعادلات $\begin{cases} \frac{x}{۲} < ۳ \\ ۲x + ۳ < ۳x + ۲ \end{cases}$ را حل کنید.

پاسخ

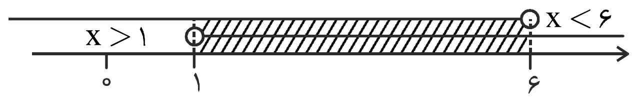
نامعادله‌های دستگاه نامعادلات را به‌ترتیب حل می‌کنیم:

نامعادله‌ی اول : $\frac{x}{۲} < ۳ \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۲}} x < ۶ \quad (۱)$

نامعادله دوم : $۲x + ۳ < ۳x + ۲ \rightarrow ۲x - ۳x < ۲ - ۳ \rightarrow -x < -۱$

$\rightarrow x > ۱ \quad (۲)$

(۱) و (۲) را روی محور نشان می‌دهیم و اشتراک آن‌ها را به عنوان جواب می‌گیریم.



اشتراک برابر است با $۱ < x$ و $x < ۶$ یعنی $۱ < x < ۶$.

مثال

نامعادله‌ی $۳x - ۳ < ۲x - ۲ \leq x - ۱$ را حل کنید.

پاسخ

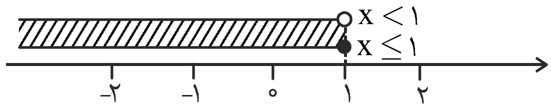
نامعادله‌ی داده شده ترکیب دو نامعادله‌ی $۲x - ۲ \leq x - ۱$ و $۳x - ۳ < ۲x - ۲$ می‌باشد. پس هر یک از این نامعادلات را جداگانه حل می‌کنیم:

نامعادله‌ی اول $۳x - ۳ < ۲x - ۲$

$۳x - ۲x < -۲ + ۳ \rightarrow x < ۱ \ (۱)$

نامعادله‌ی دوم : $۲x - ۲ \leq x - ۱ \rightarrow ۲x - x \leq -۱ + ۲ \rightarrow x \leq ۱ \quad (۲)$

حال (۱) و (۲) را روی محور نشان می‌دهیم:



اشتراک دو مجموعه برابر $x < ۱$ است.

مثال

کمترین مقدار عبارت $۴x^۲+۲۸x+۵۰$ به ازای مقادیر مختلف x چند است؟

پاسخ

$$۴x^۲+۲۸x+۵۰=\underbrace{۴x^۲+۲۸x+۴۹}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}+۱=(۲x+۷)^۲+۱$$

$$(۲x+۷)^۲\geq ۰\rightarrow (۲x+۷)^۲+۱\geq ۱$$

کمترین مقدار $۴x^۲+۲۸x+۵۰$ برابر با یک است.

مثال

نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲+۳>۱۲$

ب) $\dfrac{x^۲-۶x+۹}{x-۳}<-۴ \quad (x\neq ۳)$

ج) $\dfrac{x^۲+۴x}{\frac{x}{۲}+۲}>-۷ \quad (x\neq -۴)$

پاسخ

الف) $x^۲+۳>۱۲\rightarrow x^۲>۱۲-۳\rightarrow x^۲>۹\rightarrow x>۳$ یا $x<-۳$

ب) $\dfrac{x^۲-۶x+۹}{x-۳}<-۴\rightarrow \dfrac{(x-۳)^{\cancel{۲}}}{\cancel{(x-۳)}}<-۴\rightarrow x-۳<-۴\rightarrow x<-۱$

ج) $\dfrac{x^۲+۴x}{\frac{x}{۲}+۲}>-۷\rightarrow \dfrac{x\cancel{(x+۴)}}{\frac{۱}{۲}\cancel{(x+۴)}}>-۷\rightarrow \dfrac{\frac{x}{۱}}{\frac{۱}{۲}}>-۷$

$$۲x>-۷\rightarrow x>\frac{-۷}{۲}$$

مثال

اگر $a<b$ ثابت کنید: $a<\dfrac{a+b}{۲}<b$

پاسخ

$$a<b\rightarrow a+a<a+b\rightarrow ۲a<a+b\rightarrow a<\frac{a+b}{۲} \quad (۱)$$

$$a<b\rightarrow a+b<b+b\rightarrow a+b<۲b\rightarrow \frac{a+b}{۲}<b \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\rightarrow a<\frac{a+b}{۲}<b$$

مثال

حداقل مقدار عدد طبیعی n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$n^{۳۰۰} \geq ۸۱^{۴۵۰}$$

پاسخ

$$n^{۳۰۰} \geq ۸۱^{۴۵۰} \rightarrow n^{۳۰۰} \geq ۹^{۹۰۰} \rightarrow n^{۳۰۰} \geq (۹^{۳})^{۳۰۰} \rightarrow n \geq ۹^{۳} = ۷۲۹$$

حداقل مقدار طبیعی n برابر ۷۲۹ است.

مثال

مقدار طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم $۱۶^{۲n-۱} > ۸^{n+۷}$.

پاسخ

$$۱۶^{۲n-۱} > ۸^{n+۷} \rightarrow (۲^{۴})^{۲n-۱} > (۲^{۳})^{n+۷} \rightarrow ۲^{۸n-۴} > ۲^{۳n+۲۱} \rightarrow ۸n-۴ > ۳n+۲۱ \rightarrow ۵n > ۲۵$$

$$n > ۵ \rightarrow n \in \{۶, ۷, ۸, ۹, ...\}$$

مثال

یک استخر شنا ۲۰۰۰ تومان ورودی می‌گیرد و به ازای هر ساعت مبلغ ۷۵۰ تومان اضافه می‌گیرد. مسعود ۴۵۰۰ تومان پول دارد. او حداکثر چند ساعت می‌تواند در استخر بماند؟

پاسخ

فرض کنیم او x ساعت در استخر بماند.

$$۲۰۰۰ + ۷۵۰x \leq ۴۵۰۰ \Rightarrow ۷۵۰x \leq ۲۵۰۰ \Rightarrow x \leq ۳/۳$$

مسعود حداکثر ۳ ساعت می‌تواند در استخر بماند.

مثال

چند جفت عدد طبیعی متوالی وجود دارد که مجموع آن‌ها از ۵۰ کوچک‌تر باشد ولی از ۳۰ کوچک‌تر نباشد.

پاسخ

$$۳۰ \leq x + (x+۱) < ۵۰ \rightarrow ۳۰ \leq ۲x + ۱ < ۵۰ \rightarrow ۲۹ \leq ۲x < ۴۹$$

$$\rightarrow \frac{۲۹}{۲} \leq x < \frac{۴۹}{۲} \rightarrow ۱۴/۵ \leq x < ۲۴/۵$$

بنابراین x یکی از اعداد ۱۵ تا ۲۴ می‌باشند که تعداد آن‌ها ۱۰ تاست.

مثال

اعدادی را تعیین کنید که تفاضل آن‌ها از مربعشان بزرگ‌تر از مربع جمع آن‌ها با ۳ باشد.

پاسخ

اعداد موردنظر را x می‌نامیم. در این صورت داریم:

$$x^{۲}-x>(x+۳)^{۲}\rightarrow x^{۲}-x>x^{۲}+۶x+۹\rightarrow -۷x>۹\rightarrow x<\frac{-۹}{۷}$$

مثال

در یک تجارت سودآور واضح است که درآمد (R) باید بیشتر از هزینه (C) باشد. یعنی $R>C$. اگر معادله‌ی هزینه‌ی یک شرکت تولیدی ساعت در یک هفته به صورت $C=۳۰۰+۱/۵x$ و معادله‌ی درآمد شرکت در یک هفته به صورت $R=۲x$ باشد که در این معادلات x تعداد ساعت‌های فروخته شده در یک هفته است، این شرکت در هفته باید چند ساعت بفروشد تا این که فعالیت تولیدی آن سودآور باشد؟

پاسخ

طبق مسأله باید درآمد را بزرگ‌تر از هزینه قرار دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} R>C \\ C=۳۰۰+۱/۵x \\ R=۲x \end{array}\right\}\rightarrow ۲x>۳۰۰+۱/۵x\rightarrow ۰/۵x>۳۰۰\rightarrow x>۶۰۰$$

پس برای این که فعالیت این شرکت سودآور باشد، باید در هفته بیش از ۶۰۰ عدد ساعت بفروشد.

فصل ششم: خط و معادله‌های خطی

درس اول: معادله خط

معادله‌ی خط: رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط تشکیل‌دهنده‌ی یک خط را معادله‌ی آن خط می‌نامند.

نکته

هر خط از بی‌شمار نقطه تشکیل شده است. برای به‌دست آوردن رابطه بین طول و عرض آن خط حداقل دو نقطه لازم است.

مثال

معادله‌ی خطی که از $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌گذرد کدام است؟

پاسخ

طول و عرض با هم برابر است لذا معادله به شکل $y = x$ می‌باشد.

مثال

معادله‌ی خطی که از $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ می‌گذرد چیست؟

پاسخ

عرض هر نقطه ۲ برابر طول آن به اضافه‌ی یک است. پس: $y = ۲x + ۱$

نقاط تشکیل‌دهنده خط: برای به‌دست آوردن نقاط تشکیل دهنده‌ی خط باید به جای x یا y عددی دلخواه قرار دهیم و دیگری را پیدا کنیم.

مثال

سه نقطه از خط $y = ۲x + ۴$ را پیدا کنید.

پاسخ

به x ، ۳ مقدار دلخواه می‌دهیم و y ها را پیدا می‌کنیم:

$x = -۱, ۰, ۱$

$y = ۲ \times (-۱) + ۴ = -۲ + ۴ = ۲$

$y = ۲ \times ۰ + ۴ = ۰ + ۴ = ۴$

$y = ۲ \times ۱ + ۴ = ۲ + ۴ = ۶$

x	−۱	۰	۱
y	۲	۴	۶

صورت استاندارد معادله‌ی خط: هر معادله‌ای به شکل $y=ax+b$ را صورت استاندارد معادله‌ی خط می‌نامند. تمام x و y هایی که در این معادله صدق می‌کنند روی یک خط قرار دارند. به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطه‌ی خطی دارند. معادله‌ی بالا بی‌شمار جواب دارد.

مثال

$$y=۲x\ ,\ y=x\ ,\ y=\frac{-۱}{۳}x-\frac{۱}{۳},...$$

مثال

معادله‌ی خط $۳x-۴y=۱۲$ را به‌صورت استاندارد بنویسید.

پاسخ

$$۴y=۳x-۱۲\xrightarrow{\div ۴}y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱۲}{۴}\Rightarrow y=\frac{۳}{۴}x-۳$$

رسم خط: برای رسم یک خط کافی است دو نقطه‌ی دلخواه از یک خط را داشته باشیم آن‌ها را روی دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و به هم وصل می‌کنیم. خط گذرا از این دو نقطه همان خط مورد نظر خواهد بود.

مثال

نمودار معادله خط‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-۳x+۳$

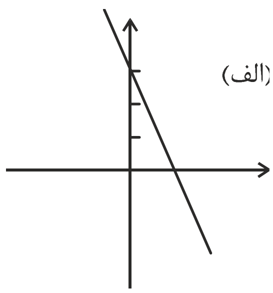
ب) $۳x+۳y=۹$

پاسخ

الف) $x=۰\rightarrow y=-۳\times ۰+۳=۰+۳=۳$

$x=۱\rightarrow y=-۳\times ۱+۳=-۳+۳=۰$

x	۰	۱
y	۳	۰



برای رسم (ب) ابتدا خط را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم.

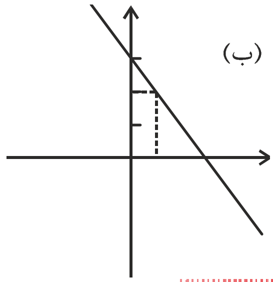
$$\text{ب)}\ ۳y=۹-۳x\rightarrow y=\frac{۹}{۳}-\frac{۳}{۳}x$$

$$\rightarrow y=۳-x\rightarrow y=-x+۳$$

$$x=۰\rightarrow y=۰+۳=۳$$

$$x=۱\rightarrow y=-۱+۳=۲$$

x	۰	۱
y	۳	۲



نکته

$y=ax$ صورت کلی معادله خط‌هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

مثال

خط به معادله ی $y=\frac{۱}{۲}x+۴$ را رسم کنید.

الف) آیا نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ روی این خط است؟

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

ج) نقطه‌ای از خط به طول ۱- را پیدا کنید.

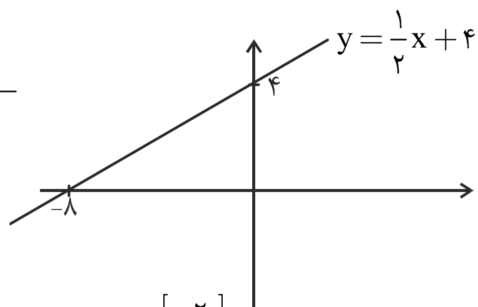
پاسخ

ابتدا خط را رسم می‌کنیم:

$$x=-۸\rightarrow y=\frac{۱}{۲}\times(-۸)+۴=۰$$

$$x=۰\rightarrow y=\frac{۱}{۲}\times۰+۴=۴$$

x	-۸	۰
y	۰	۴



الف) برای تعیین این‌که آیا نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ یا هر نقطه‌ای دیگر روی خطی واقع شده است، باید x و y این نقطه را در معادله‌ی خط قرار دهیم اگر تساوی حاصل شد این نقطه روی خط است و گرنه خیر.

$$x=۲\ ,y=-۱$$

$$y=\frac{۱}{۲}x+۴\rightarrow-۱=\frac{۱}{۲}(۲)+۴\rightarrow-۱\neq۱+۴=۵$$

همان‌طور که می‌بینیم یک طرف ۱- و طرف دیگر ۵ در می‌آید که با هم برابر نیستند. لذا $\begin{bmatrix}۲\\-۱\end{bmatrix}$ روی خط به معادله ی $y=\frac{۱}{۲}x+۴$ واقع نیست.

ب) ابتدا مختصات نقاط برخورد با محور x ها (طول‌ها): برای موارد شبیه به این در معادله‌ی خط $y=۰$ قرار می‌دهیم پس:

$$y=\frac{۱}{۲}x+۴\xrightarrow{y=۰}۰=\frac{۱}{۲}x+۴\rightarrow\frac{۱}{۲}x+۴=۰\rightarrow\frac{۱}{۲}x=-۴\rightarrow x=-۸$$

یعنی در نقطه‌ای به طول $x=-۸$ خط محور طول‌ها (x ها) را قطع می‌کند.

$$\text{مختصات نقطه ی برخورد با محور طول‌ها}=\begin{bmatrix}-۸\\ ۰\end{bmatrix}$$

اکنون مختصات نقطه‌ی برخورد خط $y=\frac{۱}{۲}x+۴$ با محور عرض‌ها (y ها) را می‌یابیم.

برای این‌کار در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم $x=۰$ و y را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۲}x+۴\rightarrow x=۰\rightarrow y=\frac{۱}{۲}\times۰+۴=۰+۴\rightarrow y=۴$$

این یعنی در نقطه‌ای به عرض۴ محور عرض‌ها(y ها) را قطع می‌کند.

$$\text{مختصات نقطه ی برخورد با محور عرض‌ها}=\begin{bmatrix}۰\\ ۴\end{bmatrix}$$

ج) در معادله‌ی خط قرار دهید $x=-۱$

$$y=\frac{۱}{۲}x+۴\xrightarrow{x=-۱}y=\frac{۱}{۲}\times(-۱)+۴=-\frac{۱}{۲}+۴=\frac{۷}{۲}\rightarrow y=\frac{۷}{۲}$$

$$\text{نقطه ای از خط به طول ۱-}=\begin{bmatrix}-۱\\ \frac{۷}{۲}\end{bmatrix}$$

مثال

کدام‌یک از نقاط زیر روی خط $-۳x+۲y=۵$ واقع است؟ چرا؟

الف) $\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}۵\\ ۴\end{bmatrix}$ پ) $C=\begin{bmatrix}-۵\\ -۵\end{bmatrix}$

پاسخ

الف)

$$-۳\times(-۱)+۲(۱)=۳+۲=۵\rightarrow۵=۵$$

تساوی برقرار است و در معادله‌ی خط صدق می‌کند، پس نقطه روی خط واقع است.

ب)

$$-۳\times۵+۲\times۴=-۱۵+۸=-۷\neq۵$$

این نقطه روی خط قرار ندارد.

پ)

$$-۳\times(-۵)+۲\times(-۵)=۱۵-۱۰=۵\rightarrow۵=۵$$

این نقطه روی خط واقع است.

مثال

مختصات نقطه‌ای از خط $۳x+۲y=۵$ را به دست آورید که عرض آن ۵ باشد؟

پاسخ

عرض نقطه را داریم پس به جای y ، ۵ قرار می‌دهیم:

$$۳x+۲\times(۵)=۵ \rightarrow ۳x+۱۰=۵ \rightarrow ۳x=-۵ \rightarrow x=\frac{-۵}{۳}$$

پس نقطه‌ی مطلوب ما $\begin{bmatrix} -\frac{۵}{۳} \\ ۵ \end{bmatrix}$ می‌باشد.

مثال

مختصات نقطه‌ی برخورد $\frac{۱}{۲}x+\frac{۲}{۳}y=۳$ را با محور عرض‌ها بیابید.

پاسخ

تمام نقاط روی محور yها دارای طول صفر می‌باشند پس در معادله، $x=۰$ قرار می‌دهیم و عرض را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}\times ۰+\frac{۲}{۳}y=۳ \rightarrow ۰+\frac{۲}{۳}y=۳ \rightarrow \frac{۲}{۳}y=۳ \rightarrow y=\frac{۹}{۲}$$

نقطه‌ی برخورد خط با محور عرض‌ها $=\begin{bmatrix} ۰ \\ \frac{۹}{۲} \end{bmatrix}$

مثال

طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه‌ی $y=۰/۸x+۱۰$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل می‌شود، طول فنر چه‌قدر می‌شود؟

پاسخ

در معادله قرار می‌دهیم $x=۵$:

$$y=۰/۸\times ۵+۱۰=۴+۱۰=۱۴ \text{ سانتی‌متر}$$

پس طول فنر ۱۴ سانتی‌متر می‌شود. اما در حالت اولیه طول فنر ۱۰ سانتی‌متر است وقتی هیچ وزنه‌ای به فنر آویزان نیست.

$$y=(۰/۸)\times ۰+۱۰=۰+۱۰=۱۰ \rightarrow y=۱۰$$

لذا وقتی وزنه‌ی ۵ کیلوگرمی را به فنر آویزان کنیم ۴ سانتی‌متر به طول فنر افزوده می‌شود.

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ خط

در معادله‌ی خط $y=ax+b$ ، عدد a شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a زاویه‌ی خط با جهت مثبت محور طول‌ها تغییر می‌کند. عدد b نشان‌دهنده‌ی محل برخورد خط با محور عرض‌هاست، به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

مثال

در معادله خط‌های زیر شیب خط و عرض از مبدأ را مشخص نمایید.

الف) $y=-۳x+۲$

ب) $\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}y=۷$

ج) $y=-۲$

د) $y=-\frac{۲}{۳}x$

پاسخ

الف) با توجه به فرم استاندارد $y=ax+b$ ، ۳- شیب خط و ۲ عرض از مبدأ است.

ب) معادله‌ی خط به فرم استاندارد نیست. لذا اول باید به فرم استاندارد در آید:

$$\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}y=۷ \rightarrow \frac{۳}{۲}y=\frac{۱}{۲}x-۷ \xrightarrow{\div\frac{۳}{۲}} y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۱۴}{۳}$$

پس با توجه به $y=ax+b$، شیب خط $\frac{۱}{۳}$ و عرض از مبدأ $\frac{-۱۴}{۳}$ می‌باشد.

ج) با توجه به $y=ax+b$ ، خط به معادله ی $y=-۲$ دارای شیب $a=۰$ و عرض از مبدأ ۲- می‌باشد.

$$y=ax+b=۰\times x+b$$

$$y=۰+b=b$$

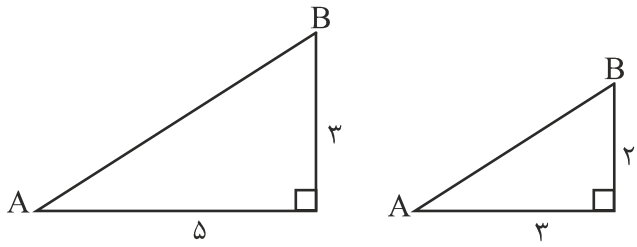
د) با توجه به $y=ax+b$ ، $y=-\frac{۲}{۳}x+۰$ دارای شیب $-\frac{۲}{۳}$ و عرض از مبدأ صفر می‌باشد.

شیب خطوط با تعبیر هندسی: شیب یک خط یعنی اندازه سراشیبی آن خط، این اندازه برابر است با نسبت میزان افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده.

$$\text{شیب} = \frac{\text{میزان افزایش ارتفاع}}{\text{مسافت افقی طی شده}}$$

مثال

در کدام حالت شیب پاره‌خط AB بیشتر است؟

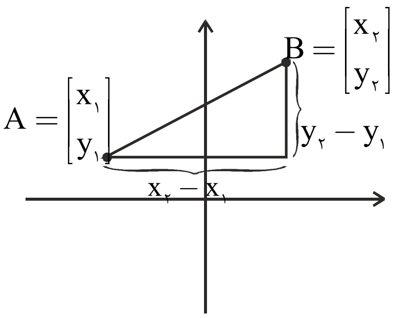


شکل (۱)

پاسخ

در شکل (۱) شیب پاره‌خط AB برابر است با میزان ارتفاع به میزان مسافت افقی یعنی $\frac{۲}{۳}$ و در شکل (۲) شیب پاره‌خط AB برابر است با $\frac{۳}{۵}$ که واضح است $\frac{۲}{۳}$ بزرگ‌تر از $\frac{۳}{۵}$ است. لذا مثلث با شیب $\frac{۲}{۳}$ دارای شیب بیشتری است.

دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x_۲\\y_۲\end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات در نظر بگیرید.



اگر روی این پاره‌خط از نقطه‌ی A به B حرکت کنیم، میزان افقی طی شده برابر $x_۲-x_۱$ و میزان افزایش ارتفاع برابر $y_۲-y_۱$ است، پس شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی A و B برابر است با:

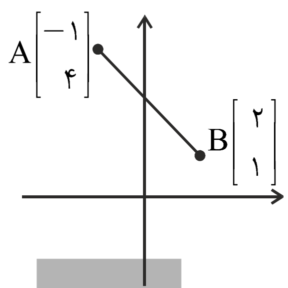
$$\text{شیب}=\frac{\text{میزان افزایش ارتفاع}}{\text{مسافت افقی طی شده}}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

مثال

شیب خطی که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}$ می‌گذرد را پیدا کنید.

پاسخ

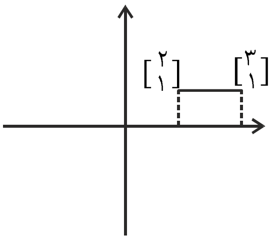
$$\text{شیب } a=\frac{۱-۴}{۲-(-۱)}=\frac{-۳}{۳}=-۱$$



مثال

شیب خطی که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بیابید.

پاسخ



$$a = \frac{۱-۱}{۳-۲} = ۰$$

نکته

۱) به طور کلی پاره‌خط‌هایی که به طور افقی رسم می‌شوند، دارای شیب صفر هستند.

۲) پاره‌خط‌هایی که به طور عمودی رسم می‌شوند، دارای شیب تعریف نشده هستند.

۳) به طور کلی اگر از چپ به راست روی خط حرکت کنیم در صورتی که رو به بالا باشد، شیب خط مثبت و اگر رو به پایین باشد، شیب منفی است.

مثال

معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن $a = ۲$ باشد و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ

$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ روی محور yها است و جایی که خط محور yها را قطع کرده است پس $b = ۱$ و از طرفی $a = ۲$.

پس:

$$y = ax + b \to y = ۲x + ۱$$

مثال

معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۱- باشد و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ

معادله‌ی خط به شکل $y = ax + b$ است. لذا $y = -۱ \times x + b$. پس $y = -x + b$.

باید b را بیابیم با جایگذاری $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ که روی خط واقع است b به دست می‌آید.

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱ \end{cases} \to -۱ + b = ۱ \to b = ۲ \to y = -x + ۲$$

نکته

معادله‌ی خطی که دارای شیب a باشد و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ بگذرد به شکل زیر می‌باشد:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال

معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۲ باشد و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ

با استفاده از فرمول بالا:

$$y - y_1 = a(x - x_1) \rightarrow y - (-1) = 2(x - 1)$$
$$y + 1 = 2(x - 1) \rightarrow y + 1 = 2x - 2 \rightarrow y = 2x - 3$$

دو خط موازی: دو خط با هم موازی‌اند، هرگاه دارای شیب یکسان باشند.

دو خط عمود بر هم: حاصل ضرب شیب هر دو خط عمود بر هم ۱- می‌باشد.

مثال

دو خط $y = -x + 3$ و $y = -x - \frac{3}{2}$ با هم موازی‌اند، چون شیب یکسان دارند و شیب هر دو ۱- می‌باشد.

مثال

معادله‌ی خطی را بنویسید که موازی محور x باشد.

پاسخ

تمام خطوط موازی محور xها دارای شیب صفر می‌باشند.

$$y = 0 \times x + b \rightarrow y = 0 + b \rightarrow y = b$$

به جای b عدد دلخواه قراردهید. مثلاً:

$$y = 4$$

مثال

دو خط داریم که بر هم عمودند. اگر شیب یکی از آن‌ها $\frac{1}{4}$ باشد، شیب دیگری را پیدا کنید.

پاسخ

بنا بر نکته‌ی بالا حاصل ضرب شیب دو خط عمود بر هم ۱- می‌باشد. پس:

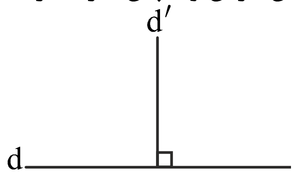
$$\frac{1}{4} \times \text{شیب خط دوم} = -1 \rightarrow \text{شیب خط دوم} = 4$$

نکته

اگر a و a' شیب خطوط عمود بر هم باشد. داریم:

$$aa' = -۱ \rightarrow a' = \frac{-۱}{a}$$

یعنی شیب هر یکی از دو خط از معکوس کردن و سپس ضرب در علامت قرینه حاصل می‌شود.



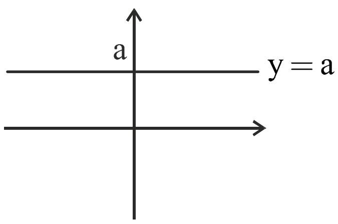
d' و d خطوط عمود بر هم با شیب‌های a و a'

نکته

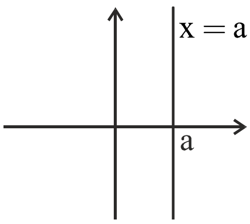
فرم کلی معادله‌ی خط به صورت $ax + by = c$ می‌باشد. یعنی اگر به جای b,a و c اعداد دلخواهی قرار دهیم، خطوط مختلفی در صفحه ایجاد می‌شود. البته فرم نوشتن $y = ax + b$ شکل استاندارد معادله‌ی خط است که برای راحتی کار بیشتر با آن کار می‌کنیم.

نکاتی درباره‌ی خطوط موازی با محورها:

۱.خط به صورت $y = a$ دارای شیب صفر می‌باشد. (موازی x ها)



۲. خط به صورت $x = a$ دارای شیب تعریف نشده می‌باشد. (موازی y ها)



۳. معادله محور طول‌ها $y = ۰$ می‌باشد.

۴. معادله‌ی محور عرض‌ها $x = ۰$ می‌باشد.

مثال

معادله‌ی خطوط زیر را بیابید:

الف) با خط $y = ۴x - ۴$ موازی بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع کند.

ب) بر خط $۳x - ۳y = ۶$ عمود بوده و محور عرض‌ها را در نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ قطع کند.

ج) شیب آن ۴- بوده و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ

الف) چون موازی این خط داده شده است، پس شیب آن ۴ می‌باشد. عرض از مبدأ هم بنا بر سوال ۳- می‌باشد. پس: $y=۴x-۳$

ب) برای راحتی کار خط را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$۳y=۳x-۶\rightarrow y=x-۲\rightarrow \text{شیب این خط}=۱\rightarrow \text{شیب خط عمود بر این خط}=\frac{-۱}{a}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

عرض از مبدأ آن نیز ۳ است بنابراین:

$$y=-۱\times x+۳=-x+۳$$

ج)

$$y=ax+b\xrightarrow{\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix}}-۱=-۴\times ۱+b\rightarrow b=-۱+۴=۳\rightarrow b=۳$$

$$y=-۴x+۳$$

مثال

معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $\begin{bmatrix}۲\\-۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$ بگذرد را بنویسید.

پاسخ

ابتدا شیب خط گذرا از این دو نقطه را می‌یابیم:

$$\text{شیب خط گذرا از } \begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x_۲\\y_۲\end{bmatrix} \quad a=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۴-(-۲)}{-۱-۲}=\frac{۶}{-۳}=-۲$$

حال یکی از نقاط مثلاً $\begin{bmatrix}۲\\-۲\end{bmatrix}$ را داخل معادله خط می‌گذاریم و عرض از مبدأ را می‌یابیم:

$$y=ax+b\rightarrow -۲=(-۲)\times(۲)+b\rightarrow -۲=-۴+b\rightarrow b=۲$$

$$y=-۲x+۲$$

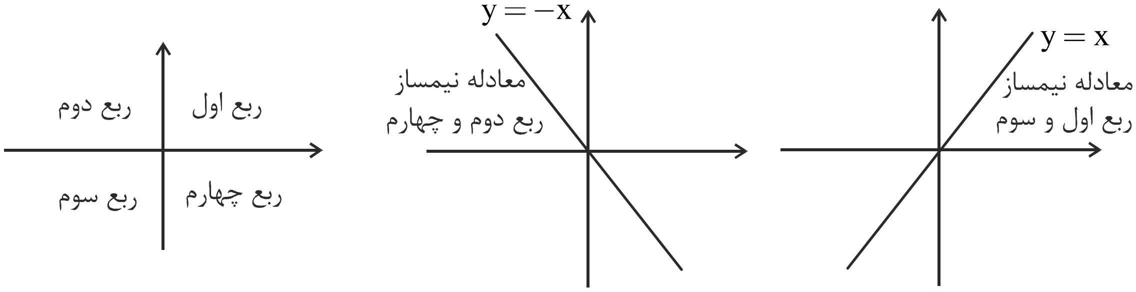
نکته

معادله‌ی خطی که از نقاط $\begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}x_۲\\y_۲\end{bmatrix}$ می‌گذرد از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$y-y_۱=\left(\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}\right)(x-x_۱)$$

نکته

از آن‌جایی که ربع‌های مختصات به شکل زیر هستند لذا معادلات نیم‌ساز ربع اول و سوم و ربع‌های دوم و چهارم به صورت زیر می‌باشند:



مثال

m چند باشد تا دو خط $۲y-۳=۴x+۱$ و $۳y+۱=(m+۱)x-۵$ بر هم عمود باشند؟

پاسخ

ابتدا هر دو معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$۲y-۳=۴x+۱ \rightarrow ۲y=۴x+۴ \rightarrow y=۲x+۲$$

$$۳y+۱=(m+۱)x-۵ \rightarrow ۳y=(m+۱)x-۶ \rightarrow y=\frac{(m+۱)}{۳}x-۲$$

طبق نکته‌های قبل : $a'=\frac{-۱}{a} \rightarrow \frac{m+۱}{۳}=\frac{-۱}{۲} \rightarrow ۲\times(m+۱)=-۱\times۳$

$$\rightarrow ۲m+۲=-۳ \rightarrow ۲m=-۵ \rightarrow m=\frac{-۵}{۲}$$

مثال

معین کنید دو خط زیر به ازای چه مقداری از n موازی و به ازای چه مقداری از n منطبق می‌شوند:

$$y=(n-۱)^۲x-۳ \qquad , \qquad y=۴x+n-۲$$

پاسخ

دو خط هنگامی بر هم منطبق هستند که علاوه بر یکی بودن شیب‌شان، دارای عرض از مبدأ یکسانی باشند. پس:

$$(n-1)^2=4\rightarrow\begin{cases}n-1=2\rightarrow n=3\\ n-1=-2\rightarrow n=-1\end{cases}$$

به ازای $n=3$ عرض از مبدأ دو خط مختلف می‌باشند. پس دو خط موازی‌اند. اما بـه ازای $n=-1$ عـرض از مبـدأ هـر دو خط ۳- می‌شود که در این صورت دو خط بر هم منطبق می‌شوند.

نکته

دو خط $\begin{cases}d:ax+by+c=0\\ d':a'x+b'y+c'=0\end{cases}$ در صورتی با هم موازی‌اند که: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ و در صورتی بر هم منطبق‌انـد کـه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

مثال

دو خط $d:3x+2y+1=0$ و $d':6x+4y+3=0$ با هم موازیند، زیرا:

$$\frac{3}{6}=\frac{2}{4}\neq\frac{1}{3}$$

مثال

دو خط $d:x-2y+3=0$ و $d':3x-6y+9=0$ بر هم منطبق‌اند، زیرا:

$$\frac{1}{3}=\frac{-2}{-6}=\frac{3}{9}$$

مثال

مقدار n را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم موازی باشند:

$$d:(n-1)x+ny-1=0$$
$$d':4nx+(n-1)y+2=0$$

پاسخ

$$\frac{n-1}{4n}=\frac{n}{n-1}\neq\frac{-1}{2}\rightarrow(n-1)(n-1)=4n\times n\rightarrow(n-1)^2=4n^2$$

$$\rightarrow(n-1)^2-4n^2=0\ \text{تجزیه اتحاد مزدوج}\rightarrow(n-1-2n)(n-1+2n)=0\rightarrow(-n-1)(3n-1)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}-n-1=0\rightarrow n=-1 & \checkmark\\ 3n-1=0\rightarrow n=\frac{1}{3} & \times\end{cases}$$

به ازای $n=\frac{1}{3}$ سه نسبت فوق مساوی شده و دو خط بر هم منطبـق مـی‌شـوند. لـذا بـه ازای $n=-1$ دو خـط d و d' موازی می‌شوند.

نکته

اگر عرض از مبدأ چند خط با هم برابر باشند، آن خطوط یکدیگر را در نقطه‌ای واقع بر محور عرض‌ها قطع می‌کنند.

نکته

خطوطی که عرض از مبدأ آن‌ها تعریف نشده است موازی محور عرض‌ها می‌باشند. لذا خودشان با هم موازیند.

نکته

دیدیم در حالتی که معادلات خطوط به فرم استاندارد بودند شرط عمود بودن آن‌ها چه بود اما برای حالت کلی معادلات خطوط عمود بر هم در صفحه داریم:

دو خط $d: ax+by+c=0$ و $d': a'x+b'y+c'=0$ در صورتی بر هم عمودند که داشته باشیم:

$$a\times a'+b\times b'=0$$

مثال

دو خط زیر بر هم عمودند. مقدار n چه‌قدر است؟

$$(n-1)x-3y+4=0$$

$$2x+(n+1)y-1=0$$

پاسخ

$$2(n-1)-3(n+1)=0 \rightarrow 2n-2-3n-3=0 \rightarrow n=-5$$

نکته

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ از فرمول زیر حساب می‌گردد:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مثال

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند

اگر بخواهیم فاصله‌ی نقطه‌ای مانند $A=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ را از خط $ax+by+c=0$ بیابیم، می‌توانیم از رابطه‌ی زیر کمک بگیریم:

$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط

مثال

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(2,-3)$ از خط $3x-4y+2=0$ چه‌قدر است؟

پاسخ

$x_1=2, y_1=-3, a=3, b=-4, c=2$

پس داریم:

$$d=\frac{|3\times 2-4\times(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|6+12+2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|20|}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=4$$

نکته

فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال

نشان دهید فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0,y_0)$ از خط $x=h$ برابر است با: $|x_0-h|$.

پاسخ

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0,y_0)$ از خط $x=h$ که می‌توان آن را به صورت $1x+0y-h=0$ نوشت براساس فرمول برابر است با:

$$d=\frac{|1\times x_0+0\times y_0-h|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{|x_0-h|}{\sqrt{1}}=|x_0-h|$$

نکته

به همین ترتیب می‌توان نشان داد فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_0,y_0)$ از خط $y=b$ برابر است با: $|y_0-b|$

مثال

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(2,-5)$ را از خطوط $x=-3$ و $y=4$ به‌دست آورید.

پاسخ

فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $x=-۳$: $|۲-(-۳)|=|۵|=۵$.

فاصله‌ی نقطه‌ی M از خط $y=۴$ برابر است با: $|-۵-۴|=۹$.

فاصله‌ی دو خط موازی از هم: برای پیدا کردن فاصله دو خط موازی $\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ ax+by+c'=۰ \end{cases}$ از رابطه‌ی زیر کمک می‌گیریم:

$$ax+by+c=۰$$

$$ax+by+c'=۰$$

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال

فاصله‌ی دو خط موازی $\begin{cases} ۳x+۴y+۱=۰ \\ ۶x+۸y-۸=۰ \end{cases}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

ابتدا معادله‌ی خطوط را شبیه هم می‌کنیم:

$$۳x+۴y+۱=۰ \xrightarrow[\text{طرفین}]{\times ۲} ۶x+۸y+۲=۰$$

فاصله دو خط موازی برابر است با:

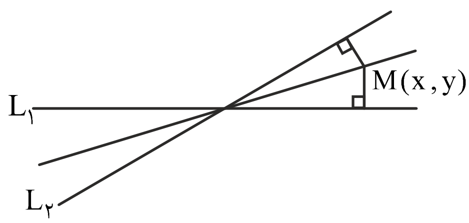
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲-(-۸)|}{\sqrt{۶^۲+۸^۲}}=\frac{۱۰}{۱۰}=۱$$

معادله‌ی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط:

دو خط $L_۱: a_۱x+b_۱y+c_۱=۰$ و $L_۲: a_۲x+b_۲y+c_۲=۰$ را در نظر بگیرید. هر نقطه مانند $M(x,y)$ واقع بر نیم‌ساز دو خط فوق دارای این ویژگی است که از دو خط $L_۱$ و $L_۲$ به یک فاصله می‌باشد. لذا معادله‌ی نیم‌ساز از رابطه‌ی زیر حاصل می‌گردد:

فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ یا $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از خط $L_۲$ = فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x,y)$ یا $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ از $L_۱$

$$\frac{|a_۱x+b_۱y+c_۱|}{\sqrt{a_۱^۲+b_۱^۲}}=\frac{|a_۲x+b_۲y+c_۲|}{\sqrt{a_۲^۲+b_۲^۲}}$$



مثال

معادله‌ی نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو خط $D':5x-12y+1=0$, $D:3x+4y-1=0$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5x-12y+1|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}\rightarrow\frac{|3x+4y-1|}{5}=\frac{|5x-12y+1|}{13}$$

$$\rightarrow\frac{3x+4y-1}{5}=\frac{5x-12y+1}{13}\rightarrow 39x+52y-13=25x-60y+5$$

$$\rightarrow 14x+112y-18=0\rightarrow 7x+56y-9=0 \qquad (1)$$

یا : $$\frac{3x+4y-1}{5}=\frac{-5x+12y-1}{13}\rightarrow 39x+52y-13=-25x+60y-5$$

$$\rightarrow 64x-8y-8=0\rightarrow 8x-y-1=0 \qquad (2)$$

معادله‌ی نیم‌ساز می‌تواند به شکل (۱) یا (۲) باشد.

درس سوم: دستگاه معادله‌های خطی

دستگاه معادلات خطی: دو معادله‌ی خط یا دو معادله‌ی دو مجهولی با هم یک دستگاه تشکیل می‌دهند.

مثال

$$\begin{cases}m=2x-1\\6x-4m+2=0\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-3y=11\\3x+5y=7\end{cases}\qquad\begin{cases}3x-2y=6\\y=5x+1\end{cases}$$

اگر دو خط متقاطع باشند، برای پیدا کردن نقطه‌ی تقاطع آن‌ها از دستگاه معادلات خطی استفاده می‌کنیم. جواب دستگاه، جواب مشترک دو معادله است.

۱) روش حذفی: در این روش باید یکی از متغیرهای x یا y را انتخاب کنیم سپس هر دو معادله را در عددی به گونه‌ای ضرب می‌کنیم که وقتی آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم یکی از متغیرها حذف شود. از معادله‌ی حاصل جمع، جواب متغیر دوم را پیدا می‌کنیم و با جایگزینی در یکی از معادلات، جواب متغیر اول را نیز تعیین می‌کنیم.

مثال

دستگاه معادلات $\begin{cases}2x+y=3\\x-2y=-1\end{cases}$ را به روش حذفی حل کنید.

پاسخ

متغیر x را برای حذف شدن انتخاب می‌کنیم. ضریب x در معادله‌ی اول برابر ۲ و ضریب x در معادله‌ی دوم برابر ۱ است. اگر معادله‌ی دوم را در ۲- ضرب کنیم، x حذف خواهد شد. پس:

$$\begin{cases} ۲x+y=۳ \\ x-۲y=-۱ \end{cases} \rightarrow -۲\times\begin{cases} ۲x+y=۳ \\ x-۲y=-۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲x+y=۳ \\ -۲x+۴y=۲ \end{cases}$$

با جمع طرفین دو معادله داریم:

$$۲x+y-۲x+۴y=۳+۲$$

$$۵y=۵ \rightarrow y=\frac{۵}{۵}=۱$$

حال جواب $y=۱$ را در یکی از معادلات دستگاه قرار می‌دهیم:

$$۲x+y=۳$$

$$۲x+۱=۳ \rightarrow ۲x=۳-۱=۲ \rightarrow x=\frac{۲}{۲}=۱$$

مثال

دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x+۲y=۱ \\ x+y=۰ \end{cases}$ را به روش حذفی حل کنید.

پاسخ

معادله‌ی دوم را در ۳- ضرب می‌کنیم تا x حذف شود.

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۱ \\ x+y=۰ \end{cases} \rightarrow -۳\times\begin{cases} ۳x+۲y=۱ \\ x+y=۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳x+۲y=۱ \\ -۳x-۳y=۰ \end{cases}$$

طرفین دو معادله را جمع می‌کنیم:

$$۳x+۲y-۳x-۳y=۱+۰ \rightarrow -y=۱ \rightarrow y=-۱$$

و با جایگزینی $y=-۱$ در معادله ی دوم دستگاه اصلی داریم:

$$x+y=۰$$

$$x-۱=۰ \rightarrow x=۱$$

پس نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ محل برخورد دو خط است.

مثال

دستگاه مقابل را به روش حذفی حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x+۳y=۷ \\ ۳x-۵y=۱ \end{cases}$$

پاسخ

ابتدا مجهول x را در نظر گرفته و معادله‌ها را در ضرایب x ضرب می‌کنیم.

توجه داشته باشید چون ضرایب x هر دو هم علامت (مثبت) هستند یکی از آن‌ها را قرینه کرده، سپس ضرب را انجام داده و معادله‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} ۳ \\ -۲ \end{array}\begin{cases} ۲x+۳y=۷ \\ ۳x-۵y=۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۶x+۹y=۲۱ \\ \underline{-۶x+۱۰y=-۲} \end{cases}$$

$$۱۹y=۱۹ \rightarrow y=۱$$

حال مقدار $y=۱$ به‌دست آمده را در یکی از معادله‌ها به دلخواه قرار داده و مقدار مجهول دیگر را به‌دست می‌آوریم.

$$۲x+۳(۱)=۷ \rightarrow ۲x+۳=۷ \rightarrow ۲x=۷-۳=۴ \rightarrow x=\frac{۴}{۲}=۲$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی برخورد این دو خط $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد.

۲) روش جایگزینی: در این روش با استفاده از یکی از معادله‌ها یکی از دو مجهول را بر حسب مجهول دیگر به‌دست می‌آوریم.

سپس مجهول محاسبه شده را در معادله‌ی دیگر جایگزین می‌کنیم تا دستگاه به یک معادله یک مجهولی تبدیل شود.

مثال

دستگاه $\begin{cases} y=۲x \\ y=x+۱ \end{cases}$ را به روش جایگزینی حل کنید.

پاسخ

معادله‌ی اول را در نظر بگیرید. در این معادله y برحسب x نوشته شده است. اگر در معادله‌ی دو به جای y مقدار $۲x$ قرار دهیم به یک معادله بر حسب x می‌رسیم:

$$y=x+۱$$

$$۲x=x+۱ \rightarrow ۲x-x=۱ \rightarrow x=۱$$

اکنون اگر $x=۱$ را در یکی از معادلات جایگزینی کنیم مقدار y به‌دست می‌آید.

$$y=۲x \rightarrow y=۲\times۱=۲ \rightarrow y=۲$$

نقطه‌ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ جواب است.

مثال

دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} y=x-۱ \\ ۲y+x=۷ \end{cases}$ را به روش جایگزینی حل کنید.

پاسخ

از معادله‌ی اول y به‌دست آمده است؛ پس آن را در معادله‌ی دوم جایگزین می‌کنیم:

$$۲y+x=۷ \rightarrow ۲(x-۱)+x=۷ \rightarrow ۲x-۲+x=۷ \rightarrow x=۳$$

با قرار دادن $x=۳$ در معادله‌ی اول مقدار y به‌دست می‌آید:

$$y=x-۱ \rightarrow y=۳-۱ \rightarrow y=۲$$

$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ جواب سوال است.

مثال

دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{۱}{۴}x-\frac{۲}{۳}y=-۱ \\ \frac{۲x+۱}{۵}-\frac{۳y}{۲}=\frac{۲}{۵} \end{cases}$$

پاسخ

در حل دستگاه با معادله‌های کسری بهتر است با ضرب معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک آن معادله را از حالت کسری خارج کرده و سپس آن را حل کنیم. پس:

$$\begin{array}{l} ۱۲ \\ ۱۰ \end{array}\begin{cases} \frac{۱}{۴}x-\frac{۲}{۳}y=-۱ \\ \frac{۲x+۱}{۵}-\frac{۳y}{۲}=\frac{۲}{۵} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳x-۸y=-۱۲ \\ ۴x+۲-۱۵y=۴ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۳x-۸y=-۱۲ \\ ۴x-۱۵y=۲ \end{cases}$$

حالا دستگاه حاصل را به کمک یکی از دو روش گفته شده حل می‌کنیم.

ویژه‌ی دانش‌آموزان علاقه‌مند

دستگاه غیرممکن: اگر دو معادله خط داده شده به‌گونه‌ای باشد که دو خط موازی باشند. واضح است که دو خط هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند. دستگاه جواب ندارد. به چنین دستگاهی، دستگاه غیرممکن گفته می‌شود. (اگر چنین دستگاهی را حل کنیم به یک تساوی نادرست می‌رسیم)

مثال

دستگاه زیر، یک دستگاه غیر ممکن است، زیرا دو خط موازی هستند:

$$\begin{cases}۳x+۴y-۲=۰\\۶x+۸y+۵=۰\end{cases}\rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

برای درک بهتر دستگاه را حل می‌کنیم:

$$-۲\times\begin{cases}۳x+۴y-۲=۰\\۶x+۸y+۵=۰\end{cases}\rightarrow+\begin{cases}-۶x-۸y+۴=۰\\۶x+۸y+۵=۰\end{cases}\rightarrow ۹=۰$$ غیرممکن است

دستگاه مبهم: اگر دو معادله خط داده شده به‌گونه‌ای باشد که دو خط منطبق باشند، دستگاه بی‌شمار جواب دارد. به چنین دستگاهی مبهم گفته می‌شود. (اگر چنین دستگاهی را حل کنیم، مجهول‌ها از بین می‌روند و به یک تساوی می‌رسیم.)

مثال

دستگاه زیر یک دستگاه مبهم است، زیرا دو خط بر هم منطبق هستند.

$$\begin{cases}x-۵y+۴=۰\\۳x-۱۵+۱۲=۰\end{cases}\rightarrow\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\rightarrow$$ دو خط منطبق‌اند.

اما باز برای فهم بهتر حل می‌کنیم:

$$-۳\times\begin{cases}x-۵y+۴=۰\\۳x-۱۵y+۱۲\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-۳x+۱۵y-۱۲=۰\\۳x-۱۵y+۱۲=۰\end{cases}\rightarrow ۰=۰\rightarrow$$ دستگاه مبهم است.

حل مسأله به کمک دستگاه: مسأله‌هایی را که دارای دو مجهول باشد، می‌توان به کمک دستگاه حل کرد.

مثال

سن مجید از دو برابر سن حمید یک سال کمتر است. اگر اختلاف سن آن‌ها ۸ سال باشد، سن مجید و حمید را به‌دست آورید.

پاسخ

سن مجید را a و سن حمید را b در نظر بگیرید. سن مجید از دو برابر سن حمید یک سال کمتر است. یعنی $a=۲b-۱$.

اختلاف سن آن‌ها ۸ سال است از طرفی سن مجید از حمید بیشتر است. پس:

$$\begin{cases}a=۲b-۱\\a-b=۸\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a-۲b=-۱\\a-b=۸\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}۱\times\\-۱\times\end{matrix}\begin{cases}a-۲b=-۱\\a-b=۸\end{cases}\rightarrow -b=-۹\rightarrow b=۹\rightarrow a=۱۷$$

پس سن مجید ۱۷ و سن حمید ۹ سال است.

مثال

اگر از صورت و مخرج کسری یک واحد کم کنیم، کسری معادل $\frac{۲}{۵}$ به‌دست می‌آید و اگر به صورت و مخرج این کسر ۵ واحد اضافه کنیم، کسر معادل $\frac{۴}{۷}$ حاصل می‌شود. آن کسر را بیابید.

پاسخ

کسر موردنظر را $\frac{x}{y}$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{x-۱}{y-۱}=\frac{۲}{۵} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۵x-۵=۲y-۲ \\ \frac{x+۵}{y+۵}=\frac{۴}{۷} \to ۷x+۳۵=۴y+۲۰ \end{cases}$$

$$\to \begin{matrix}-۲\times\end{matrix}\begin{cases} ۵x-۲y=۳ \\ ۷x-۴y=-۱۵ \end{cases} \to \begin{cases} -۱۰x+۴y=-۶ \\ ۷x-۴y=-۱۵ \end{cases} \to -۳x=-۲۱ \to x=۷$$

$$۵x-۲y=۳ \to ۵\times۷-۲y=۳ \to -۲y=۳-۳۵ \to y=\frac{-۳۲}{-۲}=۱۶$$

مثال

پول مهربد ۶۰۰ تومان از پول مهران بیشتر است. اگر مهربد خمس پولش و مهران ۱۱۶۰ تومان از پولش را خرج کند. پول مهربد ۳ برابر پول مهران می‌شود. پول هر کدام چند تومان است؟

پاسخ

پول مهربد را x و پول مهران را y در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{cases} x-y=۶۰۰ \\ x-\frac{x}{۵}=۳(y-۱۱۶۰) \end{cases} \to \begin{cases} x=y+۶۰۰ \\ \frac{۴x}{۵}=۳y-۳۴۸۰ \end{cases} \to \frac{۴(y+۶۰۰)}{۵}=۳y-۳۴۸۰$$

$$\to ۴y+۲۴۰۰=۱۵y-۱۷۴۰۰ \to ۲۴۰۰+۱۷۴۰۰=۱۵y-۴y \to ۱۱y=۱۹۸۰۰ \to y=۱۸۰۰$$

$$\to x=y+۶۰۰ \to x=۲۴۰۰$$

مثال

مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ است. اگر جای ارقام این عدد را عوض کنیم، ۱۸ واحد از آن کم می‌شود. این عدد چند است؟

پاسخ

عدد دو رقمی را $\overline{xy}$ در نظر بگیرید. داریم:

$$\begin{cases} x+y=۱۰ \\ \overline{xy}-\overline{yx}=۱۸ \to ۱۰x+y-(۱۰y+x)=۱۸ \to ۹x-۹y=۱۸ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{۹\times} \begin{cases} x+y=۱۰ \\ ۹x-۹y=۱۸ \end{cases} \to \begin{cases} ۹x+۹y=۹۰ \\ ۹x-۹y=۱۸ \end{cases} \to ۱۸x=۱۰۸ \to x=۶ \to y=۴$$

$$\overline{xy}=۶۴$$

تمرین

۱.اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴,۵\}$ و $C=\{۳,۵,۱\}$ باشد، هر یک از مجموعه‌های زیر و تعداد زیرمجموعه‌های هر کدام را تعیین کنید.

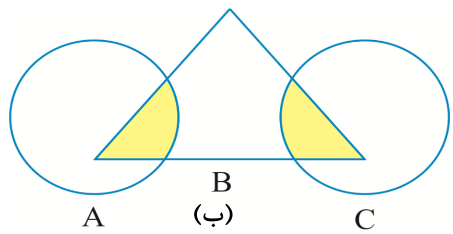
الف) $B\cap(A-C)$

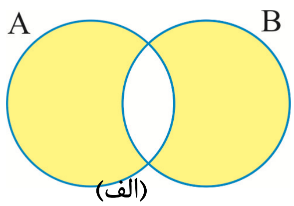
ب) $(B-C)\cup(C\cap A)$

ج) $(B-A)\cap(C-B)$

د) $(A\cap B)-(B\cup C)$

۲.برای شکل‌های زیر یک عبارت ریاضی بنویسید.





۳.تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $\{a,b,\{c\}\}$

ب) $\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$

۴.خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) با رسم نمودار درختی، مجموعه‌ی S مربوط به جنسیت فرزندان را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد که فقط یک فرزند دختر باشد؟

ج) چقدر احتمال دارد که حداقل یک فرزند دختر باشد؟

د) چقدر احتمال دارد که تعداد دخترها از پسرها بیشتر باشد؟

۵.اگر $A=\{\frac{a\div(b\div c)}{(a\div b)\div c}\,|\,a,b,c\in\mathbb{Z}, abc=۲\}$ مجموعه‌ی A را محاسبه کنید.

۶.دو تاس را باهم پرتاب می کنیم.

الف) مجموعه‌ی S را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد هر دو تاس عدد اول بیایند؟

ج) چقدر احتمال دارد عدد تاس اول از عدد تاس دوم کوچک‌تر بیاید؟

د) چقدر احتمال دارد مجموع دو تاس برابر ۹ شود؟

۷.اعداد گویای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$۲\frac{۲}{۵}\ ,\ \frac{۷}{۳}\ ,\ ۱\frac{۲۹}{۲۹}\ ,\ \frac{۲۳}{۹}\ ,\ ۲\frac{۷}{۱۵}$

۸.بین $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۲}$ پنج کسر بنویسید که مخرج آن‌ها ۲۵ باشد.

۹.حاصل هر یک از موارد زیر را پیدا کنید.

الف) $\left|-(-۷)\right|$　　ب) $-\left|-۷\right|$　　ج) $\left|۵\right|$

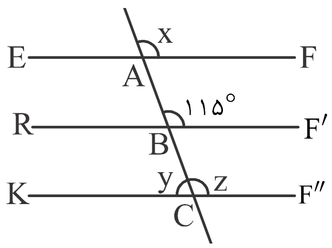
د) $\left|۲-\sqrt{۲}\right|$　　هـ) $\left|۱-\sqrt{۳}\right|$　　و) $\left|\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\right|$

۱۰.عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

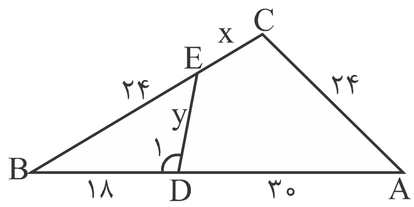
الف) $\left|-(۱-\sqrt{۳})\right|$　　ب) $\left|۲\times\sqrt{۳}-۳\times\sqrt{۲}\right|$

پ) $\left|-۵\times(۱-\sqrt{۵})\right|$

۱۱.در شکل زیر مقادیر x ، y و z را بیابید.



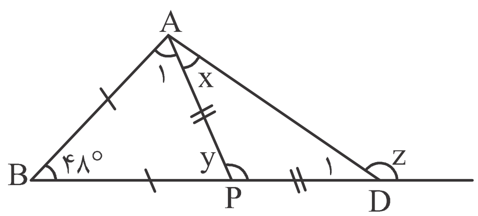
۱۲.در شکل زیر $\hat{C}=\hat{D}_۱$ طول x و y را پیدا کنید.



۱۳.مساحت مربعی را که طول آن $۸\sqrt{۲}$ است پیدا کنید.

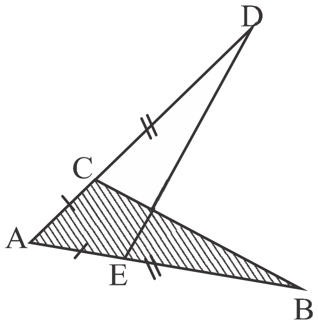
۱۴.مساحت ذوزنقه را نوشته و اثبات کنید.

۱۵.در شکل زیر $AB=BP$ و $\hat{B}=۴۸^\circ$ و $AP=PD$. زاویه‌های x، y و z را به‌دست آورید.

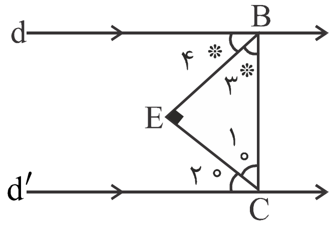


۱۶.از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع مربعی یک مربع ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع کوچک‌تر به مساحت مربع بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

۱۷.با توجه به شکل زیر ثابت کنید: $BC = DE$



۱۸.در شکل زیر ثابت کنید: $\hat{E} = ۹۰^\circ$



۱۹. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌روی زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.

۲۰.در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی قاعده‌ی کوچک با هر ساق برابر است و قاعده‌ی بزرگ دو برابر هر یک از آن‌هاست. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده این ذوزنقه چند درجه است؟

۲۱.عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $۵\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲۷} + \sqrt{۷۵}$

ب) $\sqrt[۳]{۱۶} - ۳\sqrt[۳]{۵۴} + ۷\sqrt[۳]{۲}$

۲۲.حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$۲۵ \times ۱۰^{-۱۹} \times ۴/۲۵ \times ۱۰^{۷}$

۲۳.حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\dfrac{\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۳]{۳۲}}{\sqrt[۳]{۸}}$

ب) $\sqrt{(۱۰ - \sqrt{۱۱})^{۲}}$

۲۴.مقدار x را از تساوی $۵^{x+۲} = ۱۲۵^{x+۴}$ را به‌دست آورید.

۲۵.اگر $۶۲۵^{x+۱} = ۳$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\sqrt{۲۵^{۲x+۲} + ۶۲۵ \times ۵^{۴x} + (۳^{-۲})^{-\frac{۱}{۲}}}$$

۲۶.مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۵-\sqrt[۳]{۲}}{۳\sqrt[۳]{۱۶}}$

ب) $\sqrt{\frac{۳۲}{\sqrt[۳]{۲}}}$

۲۷.اگر $x>۰$ و $\sqrt[۳]{x\sqrt[۳]{x^۲\sqrt{x^۲}}}=۲$ ، آن‌گاه x را بیابید.

۲۸.در تساوی زیر مقدار x را پیدا کنید.

$$۴^{۲x+۲}-۴^{۲x-\frac{۱}{۲}}+۴^{۲x-۱}=۵۰۴$$

۲۹.مجموع ارقام عدد $۱۰^{۴۸}-۴۸$ چیست؟

۳۰.حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۳}{۵+\sqrt{۲۶}}+\frac{۳}{\sqrt{۲۶}+\sqrt{۲۷}}+\frac{۳}{\sqrt{۲۷}+\sqrt{۲۸}}+...+\frac{۳}{\sqrt{۴۸}+۷}$$

۳۱.عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(x+x^۳)(x^۲-x-۱)$

ب) $(۵ab-۷)(۳+۲ab)$

۳۲.تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحادها کامل کنید.

الف) $(۲x-۳)^۲$

ب) $(a+b-۳)^۲$

پ) $(\frac{۲}{۳}x+\sqrt{۵})(\frac{۲}{۳}x-\sqrt{۵})$

ت) $(۳a-۷)(۳a+۴)$

۳۳.عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $۲a^۲b^۳-۶ab^۲$

ب) $۲۵x^۲-۱۵x-۱۸$

پ) $x^۴-۴$

ت) $a^۲-۳a-۱۸$

۳۴.اتحاد زیر را ثابت کنید. $(x \neq 0)$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x - \frac{1}{x})^2 + 2$$

۳۵.عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $(3x^2 - 7x - 2) - 2(5x - 3 + 2x^2)$

ب) $(\frac{4}{5}a^2x^2y)(\frac{-7}{2}ax^3y^2)$

پ) $(\frac{2}{5}ax^2 - \frac{1}{3}ax^2)(\frac{5}{3}a^2x^3)^2$

۳۶.حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(x^2 - x + 1)^2$

ب) $(2x + 3)(2x - 3)(4x^2 + 9)$

پ) $(7ax - 5y)(7ax + 3y)$

۳۷.عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $27x^3 - 8$

ب) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

پ) $y^3 - y^2 - 20y$

۳۸.اگر $a = \sqrt{2}$ ، $b = \sqrt{2} - 1$ باشد، مقدار عددی عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) + b^8$$

۳۹.نشان دهید $199^2 - 18^2$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

۴۰.حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + ... + 2^2 - 1^2 = ?$$

۴۱.قیمت ۱۵ جعبه قهوه به ۸۰ هزار تومان نمی‌رسد و قیمت۳ جعبه از ۱۳ هزار تومان بیش‌تر است. اگر قیمت هر جعبه بر حسب هزار تومان عدد صحیح باشد، قیمت هر جعبه چه‌قدر است؟

۴۲.به ازای چه مقدار از a خط $y = (2a + 1)x + 1$ بر خط $(a + 1)y = x + 2$ عمود است؟

۴۳.مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} 2x + 1 \geq 3x - 2 \\ 5x - 2 < 7x + 4 \end{cases}$ را تعیین کنید.

۴۴.نقطه‌ای روی خط $y=3x-1$ تعیین کنید که از نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$ به فاصله‌ی $\sqrt{10}$ باشد.

۴۵.مختصات نقطه‌ای واقع بر نیم‌ساز ربع اول و سوم که در ربع سوم قرار دارد را پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌ی $B=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ برابر $4\sqrt{2}$ باشد.

۴۶.تعداد کتب علمی در یک کتابخانه برابر با $\frac{11}{13}$ تعداد کتاب‌های هنری این کتابخانه می‌باشد. برای انتقال کتابخانه به شهری دیگر، کتاب‌ها را در دو واگن جا داده‌اند. $\frac{1}{15}$ کتب علمی و $\frac{18}{19}$ کتب هنری در واگن اول و بقیه در واگن دوم قرار دارند. اگر بدانیم در واگن اول بیش از ۱۰۰۰۰ کتاب و در واگن دوم کمتر از ۱۰۰۰۰ کتاب جا گرفته است، تعداد کتب علمی و هنری را تعیین کنید.

۴۷.اگر $A=(4,-2)$ و $B(-6,2)$ و $C(4,4)$ سه رأس مثلث باشند. مساحت مثلث را حساب کنید.

۴۸.نقطه‌ی تقاطع دو خط $y=2x-1$ و $3x+y=3$ را به دست آورید.

۴۹.ارزش x قطعه تولیدی یک شرکت برحسب تومان بر اساس رابطه‌ی $C(x)=1500x+2200$ به دست می‌آید.

الف) قیمت ۱۰۰ قطعه‌ی تولید شده چقدر است؟

ب) شیب این رابطه‌ی خطی را پیدا و آن را معنی کنید.

۵۰.یک مربع در نظر بگیرید. طول ضلع آن را با x و محیط آن را با y نشان دهید.

الف) ابتدا جدول زیر را کامل کنید.

x یا طول ضلع	۱	۲	۳	$\square$	۵
y یا محیط	$\square$	$\square$	$\square$	۱۶	$\square$

ب) آیا می‌توانید رابطه‌ای بین x و y پیدا کنید؟

ج) وقتی طول ضلع مربع از ۲ به ۳ تغییر می‌کند، محیط مربع چه میزان افزایش می‌یابد؟ این مقدار وقتی ضلع مربع از ۳ به ۴ تغییر می‌کند چقدر است؟ آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع(آهنگ تغییرات) مقداری ثابت است؟

۱.

الف)

$$A-C=\{۲\}\Rightarrow B\cap(A-C)=\{۲\}$$

این مجموعه یک عضو دارد، پس $۲=۲^{۱}$ زیرمجموعه دارد.

ب)

$$B-C=\{۲,۴\},C\cap A=\{۱,۳\}\Rightarrow(B-C)\cup(C\cap A)=\{۱,۲,۳,۴\}$$

$۲^{۴}=۱۶$ زیرمجموعه دارد.

ج)

$$B-A=\{۴,۵\},C-B=\{۳,۱\}\Rightarrow(B-A)\cap(C-B)=\varnothing$$

این مجموعه تهی است. پس هیچ عضوی ندارد. یعنی $n=۰$. لذا $۲^{۰}=۱$ زیرمجموعه دارد.

د)

$$A\cap B=\{۲\},B\cup C=\{۱,۲,۳,۴,۵\}\Rightarrow(A\cap B)-(B\cup C)=\varnothing$$

پس $۲^{۰}=۱$ زیرمجموعه دارد.

۲.

الف) $(A\cup B)-(A\cap B)$ یا $(A-B)\cup(B-A)$

ب) $(A\cap B)\cup(B\cap C)$

۳.

الف)

$$\varnothing,\{a\},\{b\},\{\{c\}\},\{a,b\},\{a,\{c\}\},\{b,\{c\}\},\{a,b,\{c\}\}$$

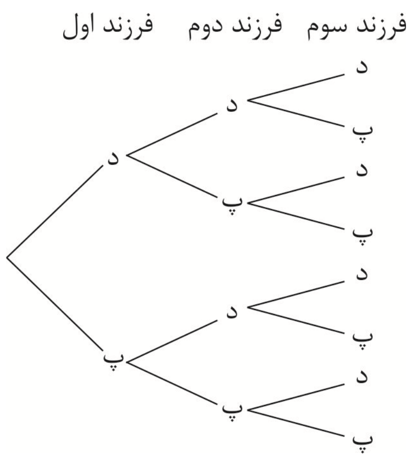
که با $۲^{۳}=۸$ زیرمجموعه مطابقت دارد.

ب)

$$\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{\{۱,۲\}\},\{۱,۲\},\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲,\{۱,۲\}\},\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$$

۴.

الف)



S = {(د,د,د), (پ,د,د), (د,پ,د), (پ,پ,د), (د,د,پ), (پ,د,پ), (د,پ,پ), (پ,پ,پ)}

ب) با توجه به S حالت‌های مطلوب A را می‌نویسیم:

A = {(د,پ,پ), (پ,د,پ), (پ,پ,د)}

$P(A)=\frac{۳}{۸}$

ج) حداقل یک دختر، یعنی یک دختر و یا بیشتر.

B = {(د,پ,پ), (پ,د,پ), (د,د,پ), (پ,پ,د), (د,پ,د), (پ,د,د), (د,د,د)}

$P(B)=\frac{۷}{۸}$

د) فقط حالت‌هایی را می‌نویسیم که تعداد دخترها از پسرها بیشتر است.

C = {(د,د,پ), (د,پ,د), (پ,د,د), (د,د,د)}

$P(C)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

۵.

$$\frac{a\div(b\div c)}{(a\div b)\div c}=\frac{a\div\frac{b}{c}}{\frac{a}{b}\div c}=\frac{a\times\frac{c}{b}}{\frac{a}{b}\times\frac{۱}{c}}=\frac{\frac{ac}{b}}{\frac{a}{bc}}=\frac{ac}{b}\times\frac{bc}{a}=c^{۲}$$

چون $abc=۲, a,b,c\in\mathbb{Z}$ پس همه حالت‌های ممکن را می‌نوبسیم:

$\begin{cases}a=b=۱\\c=۲\end{cases}$ $\begin{cases}a=b=-۱\\c=۲\end{cases}$ $\begin{cases}a=-۱\\b=۱\\c=-۲\end{cases}$ $\begin{cases}a=۱\\b=-۱\\c=-۲\end{cases}$

$\begin{cases}a=۱\\b=۲\\c=۱\end{cases}$ $\begin{cases}a=-۱\\b=۲\\c=-۱\end{cases}$ $\begin{cases}a=۱\\b=-۲\\c=-۱\end{cases}$ $\begin{cases}a=-۱\\b=-۲\\c=۱\end{cases}$

$\begin{cases}a=۲\\b=۱\\c=۱\end{cases}$ $\begin{cases}a=۲\\b=-۱\\c=-۱\end{cases}$ $\begin{cases}a=-۲\\b=-۱\\c=۱\end{cases}$ $\begin{cases}a=-۲\\b=۱\\c=-۱\end{cases}$

در هر حالتی داریم: $A=\{۱,۴\}$

۶.

الف) با استفاده از اصل ضرب متوجه می‌شویم: $n(S)=۶\times۶=۳۶$.

$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),\ldots,(۶,۶)\}$

ب) حالت مطلوب برابر است با:

$A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$

$P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

ج) حالات ممکن:

$$B=\{(۱,۲),\ldots,(۱,۶),(۲,۳),\ldots,(۲,۶),(۳,۴),\ldots,(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۶)\}$$

لذا $n(B)=۱۵$. بنابراین $P(B)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$.

د) حالات ممکن:

$$C=\{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\}$$

$$P(C)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

۷.

$$۱\frac{۲۹}{۲۹}=۱+\frac{۲۹}{۲۹}=۱+۱=۲$$

$$\frac{۷}{۳}=۲\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۲۳}{۹}=۲\frac{۵}{۹}$$

برای مقایسه‌ی کسرها کافی است کسرهای $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۷}{۱۵}$ و $\frac{۵}{۹}$ را باهم مقایسه کنیم. برای این منظور بین هر چهار کسر مخرج مشترک می‌گیریم و بعد مقایسه می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱\times۱۵}{۳\times۱۵}=\frac{۱۵}{۴۵}\\[4pt]\frac{۲\times۹}{۵\times۹}=\frac{۱۸}{۴۵}\\[4pt]\frac{۷\times۳}{۱۵\times۳}=\frac{۲۱}{۴۵}\\[4pt]\frac{۵\times۵}{۹\times۵}=\frac{۲۵}{۴۵}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۱۵}{۴۵}<\frac{۱۸}{۴۵}<\frac{۲۱}{۴۵}<\frac{۲۵}{۴۵}\Rightarrow\frac{۱}{۳}<\frac{۲}{۵}<\frac{۷}{۱۵}<\frac{۵}{۹}$$

پس

$$\underset{\underset{۱\frac{۲۹}{۲۹}}{\downarrow}}{۲}<\underset{\underset{\frac{۷}{۳}}{\downarrow}}{۲\frac{۱}{۳}}<۲\frac{۲}{۵}<۲\frac{۷}{۱۵}<\underset{\underset{\frac{۲۳}{۹}}{\downarrow}}{۲\frac{۵}{۹}}$$

۸.

در ابتدای کار دو کسر را هم مخرج می‌کنیم و کسرهای بین آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{۳}{۱۰}\ ,\ \frac{۱\times۵}{۲\times۵}\Rightarrow\frac{۳}{۱۰}<\frac{۴}{۱۰}<\frac{۵}{۱۰}$$

برای آن‌که مخرج کسرها ۲۵ شود، صورت و مخرج‌ها را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱۵}{۵۰}<\frac{۲۰}{۵۰}<\frac{۲۵}{۵۰}\xrightarrow{\text{کسرهای بین آن‌ها را می‌نویسیم}}\frac{۱۵}{۵۰}<\frac{۱۶}{۵۰}<\frac{۱۷}{۵۰}<\frac{۱۸}{۵۰}<\frac{۱۹}{۵۰}<\frac{۲۰}{۵۰}<\frac{۲۱}{۵۰}<\frac{۲۲}{۵۰}<\frac{۲۳}{۵۰}<\frac{۲۴}{۵۰}<\frac{۲۵}{۵۰}$$

حال برای آن‌که مخرج کسرها ۲۵ شود، باید آن‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. دقت شود کسرهایی را برای این‌کار انتخاب می‌کنیم که صورت و مخرج‌های آن‌ها بر ۲ بخش‌پذیر باشند.

$$\frac{۱۶}{۵۰},\frac{۱۸}{۵۰},\frac{۲۰}{۵۰},\frac{۲۲}{۵۰},\frac{۲۴}{۵۰}$$

$$\frac{۸}{۲۵}\ \frac{۹}{۲۵}\ \frac{۱۰}{۲۵}\ \frac{۱۱}{۲۵}\ \frac{۱۲}{۲۵}\Rightarrow\frac{۳}{۱۰}<\frac{۸}{۲۵}<\frac{۹}{۲۵}<\frac{۱۰}{۲۵}<\frac{۱۱}{۲۵}<\frac{۱۲}{۲۵}<\frac{۱}{۲}$$

۹.

الف) $|-(-۷)|=۷$

ب) $-|-۷|=-۷$

ج) $|۵|=۵$

د) $|\underbrace{۲-\sqrt{۲}}_{\text{مثبت}}|=+(۲-\sqrt{۲})=۲-\sqrt{۲}$

هـ) $|\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{\text{منفی}}|=-(۱-\sqrt{۳})=-۱+\sqrt{۳}=\sqrt{۳}-۱$

و) $|\underbrace{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}_{\text{مثبت}}|=+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$

۱۰.

در حل تمام سؤال‌های مشابه این سؤال باید کاری کنیم که عبارت بیرون آمده از قدر مطلق مثبت باشد. لذا اگر حاصل داخل قدر مطلق مثبت باشد، همان عبارت را عینا بیرون قدر مطلق می‌آوریم اما اگر حاصل عبارت داخل قدر مطلق منفی شد، قدر مطلق را برمی‌داریم و عبارت داخل قدر مطلق را در علامت منفی ضرب می‌کنیم.

الف)

$$\sqrt{۳}\simeq۱/۷\to۱-\sqrt{۳}\simeq-۰/۷$$
$$\left|-(۱-\sqrt{۳})\right|=\left|\sqrt{۳}-۱\right|=\sqrt{۳}-۱$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۳}\simeq۱/۷\to۲\times۱/۷\simeq۳/۴\\ \sqrt{۲}\simeq۱/۴\to۳\times۱/۴\simeq۴/۲\end{array}\right\}\to(۲\times\sqrt{۳}-۳\times\sqrt{۲})\simeq۳/۴-۴/۲\simeq-۰/۸$$

حاصل داخل قدر مطلق منفی است، لذا در علامت منفی ضرب می‌کنیم.

$$\left|۲\times\sqrt{۳}-۳\times\sqrt{۲}\right|=-(۲\times\sqrt{۳}-۳\times\sqrt{۲})=۳\times\sqrt{۲}-۲\times\sqrt{۳}$$

پ) می‌دانیم $\sqrt{۵}\simeq۲/۲$. پس:

$$۱-\sqrt{۵}\simeq۱-۲/۲=-۱/۲$$

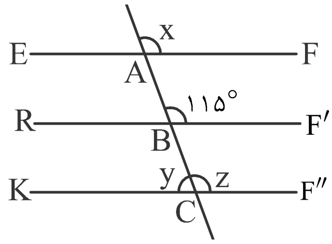
اگر $۱-\sqrt{۵}\simeq-۱/۲$ را در ۵- ضرب کنیم، حاصل عددی مثبت خواهد بود. تقریبا برابر ۷+

با استفاده از این مطلب داریم:

$$\left|-۵(۱-\sqrt{۵})\right|=\left|-۵+۵\sqrt{۵}\right|=+(-۵+۵\sqrt{۵})=۵\sqrt{۵}-۵$$

.۱۱

با توجه به شکل داریم:



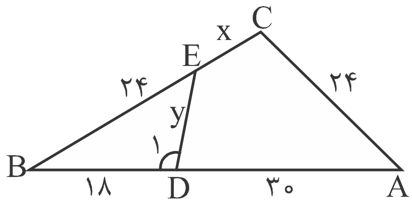
$EF \| RF'$ خط مورب $\rightarrow x = ۱۱۵°$

$RF' \| KF''$ خط مورب $\rightarrow Z = ۱۱۵°$

$y = ۱۸۰° - ۱۱۵° = ۶۵°$

.۱۲

با توجه به شکل:



$$\left.\begin{array}{r} \hat{B} = \hat{B}\ \text{مشترک} \\ \hat{C} = \hat{D}_۱ \end{array}\right\} \overset{\Delta}{ABC} \underset{(ز\ ز)}{\sim} \overset{\Delta}{BDE}$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

$$\frac{۲۴}{۴۸} = \frac{y}{۲۴} = \frac{۱۸}{۲۴+x} \rightarrow \frac{۲۴}{۴۸} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{y}{۲۴} = \frac{۱}{۲} \rightarrow y = ۱۲$$

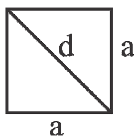
$$\frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{۱}{۲} \rightarrow ۳۶ = ۲۴ + x \rightarrow x = ۱۲$$

.۱۳

بنابر قضیه‌ی فیثاغورس می‌دانیم که $d = \sqrt{۲}\,a$.

پس: $d = \sqrt{۲}\,a = ۸\sqrt{۲}$

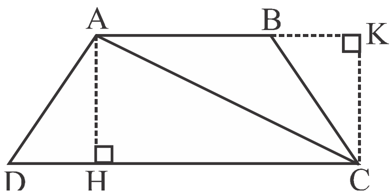
$a = ۸ \rightarrow$ مساحت $= a \times a = ۸ \times ۸ = ۶۴$



.۱۴

فرض: $AB \| CD$

حکم: $S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD) \times AH$



مساحت ذوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده ضرب در نصف ارتفاع.

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم. ذوزنقه تبدیل به دو مثلث می‌شود. AH ارتفاع مثلث ACD و CK ارتفاع مثلث ABC است.

با توجه به این که دو قاعده‌ی ذوزنقه موازی هستند و فاصله‌ی دو خط موازی مقداری ثابت است پس: $AH = CK$.

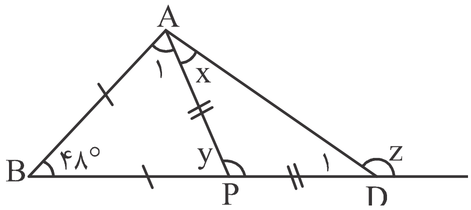
لذا:

مساحت ذوزنقه $= S_{ABC} + S_{ACD}$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} \times AB \times CK + \frac{۱}{۲} CD \times AH = \frac{۱}{۲} AB \times AH + \frac{۱}{۲} CD \times AH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AH \times (AB + CD)$$

۱۵.



فرض: $AP = PD$ ، $AB = BP$ و $\hat{B} = ۴۸^\circ$

بنا به فرض $AB = BP$ پس مثلث ABP متساوی‌الساقین است. پس زاویه‌های روبه‌روی دو ساق با هم برابرند.

$\hat{A}_۱ = y$

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰° است.

$۴۸^\circ + y + y = ۱۸۰^\circ \rightarrow ۲y = ۱۳۲^\circ \rightarrow y = ۶۶^\circ$

مثلث APD نیز متساوی‌الساقین است و زاویه‌های روبه‌روی دو ساق با هم برابرند. پس $\hat{D}_۱ = x$.

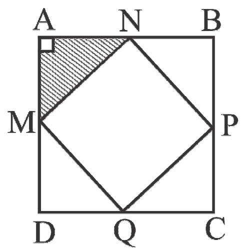
در هر مثلث هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش.

$y = x + \hat{D}_۱ \rightarrow y = x + x \rightarrow y = ۲x \rightarrow ۶۶^\circ = ۲x \Rightarrow x = ۳۳^\circ$

$z = ۱۸۰^\circ - x \quad \rightarrow \quad z = ۱۸۰^\circ - ۳۳^\circ = ۱۴۷^\circ$

۱۶.

شکل زیر را رسم می‌کنیم:



$AB = AD = a$ ، $\hat{A} = ۹۰^\circ$ ، M و N وسط دو ضلع مربع هستند.

$AN = \frac{۱}{۲}a$ و $AM = \frac{۱}{۲}a$ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

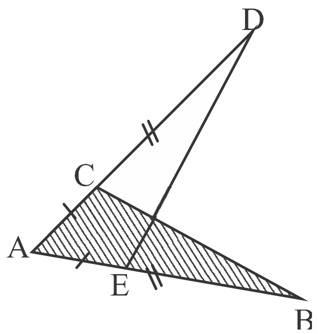
رابطه‌ی فیثاغورس را برای این مثلث می‌نویسیم:

$(MN)^۲ = (AN)^۲ + (AM)^۲$ و $(MN)^۲ = (\frac{۱}{۲}a)^۲ + (\frac{۱}{۲}a)^۲ = \frac{۲}{۴}a^۲ = \frac{۱}{۲}a^۲$

مساحت مربع $A\overset{\square}{B}CD = a^۲$ و مساحت مربع $M\overset{\square}{N}PQ = (MN)^۲ = \frac{۱}{۲}a^۲$

نسبت مساحت مربع کوچک‌تر به مربع بزرگ‌تر $\frac{۱}{۲}$ است.

۱۷.



فرض: $CD = BE$ و $AC = AE$

حکم: $BC = DE$

اثبات (برهان):

۱- بنا بر فرض $CD = EB$ و $AC = AE$

-۲ $AC+CD=AE+EB\to AD=AB$

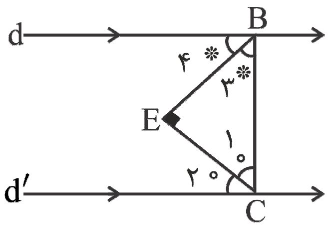
-۳ $\hat{A}=\hat{A}$ مشترک

از روابط ۱ ، ۲ و ۳ نتیجه می‌گیریم:

$A\overset{\triangle}{D}E \cong A\overset{\triangle}{C}B$ (ض ز ض)

$DE=BC$ اجزای نظیر

۱۸.



فرض: $d\|d' , \hat{B}_۳=\hat{B}_۴ , \hat{C}_۱=\hat{C}_۲$

حکم: $\hat{E}=۹۰^\circ$

اثبات:

زاویه‌های متقابل داخلی مکمل‌اند. $d\|d' \to (\hat{B}_۳+\hat{B}_۴)+(\hat{C}_۱+\hat{C}_۲)=۱۸۰^\circ$ و BC مورب

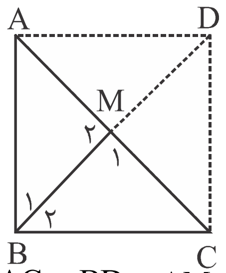
بنا به فرض $\hat{C}_۱=\hat{C}_۲$ و بنا به فرض $\hat{B}_۳=\hat{B}_۴$

$$(\hat{B}_۳+\hat{B}_۳)+(\hat{C}_۱+\hat{C}_۱)=۱۸۰\to \hat{B}_۳+\hat{C}_۱=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}\to \hat{B}_۳+\hat{C}_۱=۹۰^\circ$$

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث $B\overset{\triangle}{E}C$ ۱۸۰° است. $\hat{E}+\hat{B}_۳+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ$

$$\hat{E}+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ\to E=۹۰^\circ$$

۱۹.



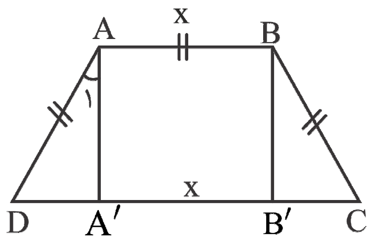
میانه‌ی وارد بر ضلع AC را رسم می‌کنیم پس $AM=MC$ از طرفی AC قطر مستطیل است و BD هم قطر مستطیل است و با هم برابر و یکدیگر را نصف می‌کنند.

پس:

$AC=BD$ و $AM=MC\to BM=MD$

در مثلث $A\overset{\triangle}{M}B$ چون $BM=AM$ است پس متساوی‌الساقین است و چون $\hat{A}=۳۰^\circ$ پس $\hat{B}_۱=۳۰^\circ$ و مثلث $B\overset{\triangle}{M}C$ متساوی‌الساقین است. چون $BM=MC$ پس هر یک از زاویه‌های روبه رو با هم برابر هستند و $\hat{C}=۶۰^\circ$ است و $\hat{B}_۲=۶۰^\circ$. حال مثلث متساوی‌الاضلاع است و $\hat{M}_۱=۶۰^\circ$ است و هر سه ضلع برابرند، یعنی $BM=MC=BC$ و $AM=BM$ ، AM که نصف AC بوده، BM هم نصف AC و BC نصف AC در نتیجه: $BC=\frac{AC}{۲}$

۲۰.



ذوزنقه متساوی‌الساقین $\rightarrow DC = DA' + A'B' + B'C = ۲x$

$DA' = B'C\ ,\ DA' + B'C = x \rightarrow D'A = \frac{x}{۲}$

$\rightarrow \hat{A}_{۱} = ۳۰^\circ \rightarrow \hat{D} = ۶۰^\circ$

.۲۱

الف) $۵\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۲۷} + \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳} - ۲\sqrt{۳^{۳}} + \sqrt{۳\times ۵^{۲}} = ۵\sqrt{۳} - ۲\times ۳\sqrt{۳} + ۵\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$

ب) $\sqrt[۳]{۱۶} - ۳\sqrt[۳]{۵۴} + ۷\sqrt[۳]{۲} = \sqrt[۳]{۲^{۴}} - ۳\sqrt[۳]{۲\times ۳^{۳}} + ۷\sqrt[۳]{۲} = \sqrt[۳]{۲^{۳}\times ۲^{۱}} - ۳\sqrt[۳]{۲\times ۳^{۳}} + ۷\sqrt[۳]{۲}$

$= ۲\sqrt[۳]{۲} - ۹\sqrt[۳]{۲} + ۷\sqrt[۳]{۲} = -۷\sqrt[۳]{۲} + ۷\sqrt[۳]{۲} = ۰$

.۲۲

$۲۵\times ۱۰^{-۱۹}\times ۴/۲۵\times ۱۰^{۷} = ۲/۵\times ۱۰^{۱}\times ۱۰^{-۱۹}\times ۴/۲۵\times ۱۰^{۷} = ۲/۵\times ۴/۲۵\times ۱۰^{۱+(-۱۹)+۷}$

$= ۱۰/۶۲۵\times ۱۰^{-۱۱} = ۱/۰۶۲۵\times ۱۰^{-۱۰}$

.۲۳

الف) $\frac{\sqrt[۳]{۲}\times \sqrt[۳]{۳۲}}{\sqrt[۳]{۸}} = \frac{\sqrt[۳]{۶۴}}{\sqrt[۳]{۸}} = \sqrt[۳]{\frac{۶۴}{۸}} = \sqrt[۳]{۸} = \sqrt[۳]{۲^{۳}} = ۲$

ب) $\sqrt{(۱۰-\sqrt{۱۱})^{۲}} = |۱۰-\sqrt{۱۱}| = ۱۰-\sqrt{۱۱}$

.۲۴

$۵^{x+۲} = ۱۲۵^{x+۴} \rightarrow ۵^{x+۲} = (۵^{۳})^{x+۴} \rightarrow ۵^{x+۲} = ۵^{۳x+۱۲}$

چون پایه‌های یکی است، لذا توان‌ها هم باید یکسان باشند پس:

$x+۲ = ۳x+۱۲ \rightarrow -۱۰ = ۲x \rightarrow x = -۵$

.۲۵

$۶۲۵^{x+۱} = ۳ \rightarrow (۵^{۴})^{x+۱} = ۳ \rightarrow ۵^{۴x}\times ۵^{۴} = ۳ \rightarrow ۵^{۴x} = \frac{۳}{۵^{۴}} = \frac{۳}{۶۲۵}$

$\sqrt{۲۵^{۲x+۲} + ۶۲۵\times ۵^{۴x} + (۳^{-۲})^{-\frac{۱}{۲}}} = \sqrt{(۵^{۲})^{۲x+۲} + ۶۲۵\times ۵^{۴x} + ۳^{-۲\times(-\frac{۱}{۲})}} = \sqrt{۵^{۴x+۴} + ۶۲۵\times ۵^{۴x} + ۳}$

$= \sqrt{۳ + ۶۲۵\times \frac{۳}{۶۲۵} + ۳} = \sqrt{۳+۳+۳} = \sqrt{۹} = ۳$

.۲۶

الف) $\frac{۵-\sqrt[۳]{۲}}{۳\sqrt[۳]{۱۶}} = \frac{۵-\sqrt[۳]{۲}}{۳\sqrt[۳]{۲^{۴}}}\times \frac{\sqrt[۳]{۲^{۲}}}{\sqrt[۳]{۲^{۲}}} = \frac{(۵-\sqrt[۳]{۲})(\sqrt[۳]{۲^{۲}})}{۳\sqrt[۳]{۲^{۶}}} = \frac{۵\sqrt[۳]{۴} - \sqrt[۳]{۲^{۳}}}{۳\times ۲^{۲}} = \frac{۵\sqrt[۳]{۴} - ۲}{۱۲}$

ب) $\sqrt{\frac{۳۲}{\sqrt[۳]{۲}}} = \frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{\sqrt[۳]{۲}}} = \frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt[۶]{۲}}\times \frac{\sqrt[۶]{۲^{۵}}}{\sqrt[۶]{۲^{۵}}} = \frac{۴\sqrt{۲}\times \sqrt[۶]{۳۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲}\times \sqrt[۶]{۳۲}$

.۲۷

$$\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^2}}}=\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x^2\times x}}=\sqrt[3]{x\times\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[3]{x\times x}=\sqrt[3]{x^2}=2$$

پس $\sqrt[3]{x^2}=2\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۳ میرسانیم}}(\sqrt[3]{x^2})^3=2^3\to x^2=8\xrightarrow{\text{جذر از طرفین}}x=\pm\sqrt{8}$

$x>0$ اما $\to x=\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$ قابل قبول

.۲۸

$$4^{2x+2}-4^{2x-\frac{1}{2}}+4^{2x-1}=504\to(2^2)^{2x+2}-(2^2)^{2x-\frac{1}{2}}+(2^2)^{2x-1}=2^3\times 3^2\times 7$$

$$2^{4x+4}-2^{4x-1}+2^{4x-2}=2^{4x-2}\times(\underbrace{2^6-2+1}_{63})=2^3\times 63\to 2^{4x-2}=2^3$$

$$\to 4x-2=3\to 4x=3+2\to x=\frac{5}{4}$$

.۲۹

$$10^{48}-48=\overbrace{100.....00}^{\text{تا } 48}$$

$$\begin{array}{r} 100.....00 \\ -\qquad 48 \\ \hline \underbrace{999.....99}_{\text{تا } 46}52 \end{array}$$

$$(46\times 9)+5+2=421$$

.۳۰

مخرج تمامی کسرها را گویا می‌کنیم و از ۳ صورت تمامی کسرها فاکتور می‌گیریم:

$$=3\left(\frac{1\times(5-\sqrt{26})}{(5+\sqrt{26})\times(5-\sqrt{26})}+\frac{1\times(\sqrt{26}-\sqrt{27})}{(\sqrt{26}+\sqrt{27})(\sqrt{26}-\sqrt{27})}+....+\frac{1\times(\sqrt{48}-7)}{(\sqrt{48}+7)(\sqrt{48}-7)}\right)$$

$$=3\left(\frac{5-\sqrt{26}}{25-26}+\frac{\sqrt{26}-\sqrt{27}}{26-27}+...+\frac{\sqrt{48}-7}{48-49}\right)=3\left(\frac{5-\sqrt{26}}{-1}+\frac{\sqrt{26}-\sqrt{27}}{-1}+...+\frac{\sqrt{48}-7}{-1}\right)$$

$$=3(-5+\underbrace{\sqrt{26}-\sqrt{26}}_{0}+\underbrace{\sqrt{27}-\sqrt{27}}_{0}+\underbrace{\sqrt{28}-\sqrt{28}}_{0}+...+\underbrace{\sqrt{48}-\sqrt{48}}_{0}+7)$$

$$=3(-5+7)=3\times 2=6$$

.۳۱

الف) $(x+x^3)(x^2-x-1)=\cancel{x^3}-x^2-x+x^5-x^4-\cancel{x^3}=-x^2-x+x^5-x^4$

به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$=x^5-x^4-x^2-x$$

ب) $(5ab-7)(3+2ab)=(5ab)(3)+(5ab)(2ab)-7\times 3-7\times 2ab$

$$=15ab+10a^2b^2-21-14ab=ab+10a^2b^2-21=10a^2b^2+ab-21$$

.۳۲

الف) $(۲x-۳)^{۲}=(۲x)^{۲}+۲(۲x)(-۳)+(-۳)^{۲}=۴x^{۲}-۱۲x+۹$ (اتحاد مربع دوجمله‌ای)

ب) $(a+b-۳)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+(-۳)^{۲}+۲ab+۲(a)(-۳)+۲(b)(-۳)$ (اتحاد مربع سه جمله‌ای)

$=a^{۲}+b^{۲}+۹+۲ab-۶a-۶b=a^{۲}+b^{۲}+۲ab-۶a-۶b+۹$

پ) $(\frac{۲}{۳}x+\sqrt{۵})(\frac{۲}{۳}x-\sqrt{۵})=(\frac{۲}{۳}x)^{۲}-(\sqrt{۵})^{۲}=\frac{۴}{۹}x^{۲}-۵$ (اتحاد مزدوج)

ت) $(۳a-۷)(۳a+۴)=(۳a)^{۲}+(-۷+۴)(۳a)+(-۷)(۴)$ (اتحاد یک جمله مشترک)

$=۹a^{۲}+(-۳\times۳a)-۲۸=۹a^{۲}-۹a-۲۸$

.۳۳

الف) $۲a^{۲}b^{۳}-۶ab^{۲}=۲ab^{۲}(ab-۳)$ (فاکتورگیری از $۲ab^{۲}$)

ب) $۲۵x^{۲}-۱۵x-۱۸=(۵x-۶)(۵x+۳)$ (تجزیه با اتحاد جمله مشترک)

پ) $x^{۴}-۴=(\underbrace{x^{۲}-۲})(x^{۲}+۲)=(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})(x^{۲}+۲)$ (تجزیه با اتحاد مزدوج)

ت) $a^{۲}-۳a-۱۸=(a-۶)(a+۳)$ (تجزیه با اتحاد جمله مشترک)

.۳۴

$x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=(x-\frac{۱}{x})^{۲}+۲$

طرف راست : $(x^{۲}-۲\cancel{x}\times\frac{۱}{\cancel{x}}+(\frac{۱}{x})^{۲})+۲=x^{۲}-\cancel{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}+\cancel{۲}=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$

بنابراین اتحاد درست است $\rightarrow$ برابر با طرف چپ $\rightarrow$

.۳۵

الف) $(۳x^{۲}-۷x-۲)-۲(۵x-۳+۲x^{۲})=۳x^{۲}-۷x-۲-۱۰x+۶-۴x^{۲}=-x^{۲}-۱۷x+۴$

ب) $(\frac{۴}{۵}a^{۲}x^{۲}y)(\frac{-۷}{۲}ax^{۳}y^{۲})=\frac{\overset{۲}{\cancel{-۴}}}{۵}\times\frac{۷}{\cancel{۲}}a^{۲+۱}x^{۲+۳}y^{۱+۲}=\frac{-۱۴}{۵}a^{۳}x^{۵}y^{۳}$

پ) $(\frac{۲}{۵}ax^{۲}-\frac{۱}{۳}ax^{۲})(\frac{۵}{۳}a^{۲}x^{۳})^{۲}=(\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۳})ax^{۲}(\frac{۵}{۳}a^{۲}x^{۳})^{۲}=\frac{۱}{\underset{۳}{\cancel{۱۵}}}ax^{۲}(\frac{\overset{۵}{\cancel{۲۵}}}{۹}a^{۴}x^{۶})=\frac{۵}{۲۷}a^{۵}x^{۸}$

.۳۶

الف) $(x^{۲}-x+۱)^{۲}=(x^{۲})^{۲}+(-x)^{۲}+۱^{۲}+۲(x^{۲})(-x)+۲(-x)(۱)+۲(x^{۲})(۱)$ (اتحاد مربع سه جمله‌ای)

$=x^{۴}+x^{۲}+۱-۲x^{۳}-۲x+۲x^{۲}=x^{۴}-۲x^{۳}+۳x^{۲}-۲x+۱$

ب) $(۲x+۳)(۲x-۳)(۴x^{۲}+۹)=(۴x^{۲}-۹)(۴x^{۲}+۹)=(۴x^{۲})^{۲}-۹^{۲}=۱۶x^{۴}-۸۱$ (اتحاد مزدوج)

پ) $(۷ax-۵y)(۷ax+۳y)=(۷ax)^{۲}+(-۵y+۳y)(۷ax)+(-۵y\times۳y)$ (اتحاد جمله مشترک)

$=۴۹a^{۲}x^{۲}-۱۴axy-۱۵y^{۲}$

.۳۷

الف $۲۷x^۳ - ۸ = (۳x)^۳ - ۲^۳ = (۳x - ۲)(۹x^۲ + ۶x + ۴)$ (اتحاد چاق و لاغر)

ب $x^۳ + x^۲ - ۹x - ۹ = x^۲(x+۱) - ۹(x+۱) = (x+۱)(x^۲ - ۹) = (x+۱)(x-۳)(x+۳)$

پ) $y^۳ - y^۲ - ۲۰y = y(y^۲ - y - ۲۰) = y(y-۵)(y+۴)$

.۳۸

با توجه به این که $a - b = \sqrt{۲} - (\sqrt{۲} - ۱) = ۱$ است پس می‌توان آن را در عبارت بالا ضرب کرد و نتیجه تغییری نمی‌کند. چون عدد ۱ ضرب در هر عبارتی برابر همان عبارت است.

پس: $\text{عبارت} = ۱\times \text{عبارت} = (a-b)\times \text{عبارت} = (a-b)(a+b)(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)+b^۸$

$$= (a^۲ - b^۲)(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)+b^۸ = (a^۴-b^۴)(a^۴+b^۴)+b^۸ = (a^۸ - \cancel{b^۸}) + \cancel{b^۸}$$

$$= a^۸ = (\sqrt{۲})^۸ = ((\sqrt{۲})^۲)^۴ = ۲^۴ = ۱۶$$

.۳۹

$۱۹۹^۲ - ۱۸^۲ = (۱۹۹ - ۱۸)(۱۹۹ + ۱۸) = ۱۸۱\times ۲۱۷$ (به کمک اتحاد مزدوج)

$= ۱۸۱ \times ۷ \times ۳۱$

چون عامل ۳۱ دارد پس بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

.۴۰

$$\text{عبارت} = (۱۰۰ - ۹۹)(۱۰۰ + ۹۹) + (۹۸ - ۹۷)(۹۸ + ۹۷) + ... + (۲ - ۱)(۲ + ۱)$$

$$= ۱\times ۱۹۹ + ۱ \times ۱۹۵ + ... + ۱\times ۳ = ۱۹۹ + ۱۹۵ + ۱۹۱ + ... + ۳$$

تعداد جملاتی که با یکدیگر فاصله‌ی یکسانی دارند، به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{تعداد جملات} = \frac{|\text{اولین جمله} - \text{آخرین جمله}|}{\text{فاصله‌ی هر دو عدد پشت سر هم}} + ۱$$

پس:

$$\text{تعداد جمله‌ها} = \frac{|۳ - ۱۹۹|}{۴} + ۱ = ۴۹ + ۱ = ۵۰$$

مجموع چند جمله که با یکدیگر فاصله یکسان دارند به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{مجموع جملات} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{جمله آخر} + \text{جمله‌ی اول})}{۲} = \frac{(۱۹۹ + ۳)\times ۵۰}{۲} = ۵۰۵۰$$

.۴۱

$$۱۵x < ۸۰ \to x < \frac{۸۰}{۱۵} = \frac{۱۶}{۳} \underset{\text{تقریباً}}{\approx} ۵/....$$

$$۳x > ۱۳ \to x > \frac{۱۳}{۳} \underset{\text{تقریباً}}{\approx} ۴/... \to ۴/... < x < ۵/... \; x = ۵$$ هزار تومان $\leftarrow x \in \mathbb{Z}$

۴۲. شیب هر یک از دو خط را تعیین کرده و حاصل ضرب آن‌ها را برابر ۱-قرار می‌دهیم.

$$y = (۲a+۱)x + ۱ \xrightarrow{\text{ضریب } x = \text{شیب}} m = ۲a + ۱$$

$$(a+۱)y = x + ۲ \xrightarrow{\div(a+۱)} y = \frac{x}{a+۱} + \frac{۲}{a+۱} \to \underset{\text{شیب خط}}{m'} = \frac{۱}{a+۱}$$

حاصل ضرب شیب دو خط عمود بر هم باید ۱- شود. $\Rightarrow m \times m' = -۱ \to \frac{۲a+۱}{a+۱} = -۱ \to ۲a+۱ = -a-۱$

$$۳a = -۲ \to a = -\frac{۲}{۳}$$

.۴۳

$$\begin{cases} ۲x+۱ \geq ۳x-۲ \to ۲x-۳x \geq -۲-۱ \to -x \geq -۳ \to x \leq ۳ \\ ۵x-۲ < ۷x+۴ \to ۵x-۷x < ۴+۲ \to -۲x < ۶ \to x > -۳ \end{cases} -۳ < x \leq ۳$$ مجموعه جواب

.۴۴

اگر طول نقطه‌ی مورد نظر x باشد. آن‌گاه عرض آن $۳x - ۱$ می‌باشد، زیرا این نقطه روی خط $y = ۳x - ۱$ واقع است.

پس:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۲ \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} x \\ ۳x-۱ \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{AB=\sqrt{۱۰}} \sqrt{(x+۳)^۲ + (۳x-۱+۲)^۲} = \sqrt{۱۰} \to \sqrt{(x+۳)^۲ + (۳x+۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x+۳)^۲ + (۳x+۱)^۲ = ۱۰ \to x^۲ + ۶x + ۹ + ۹x^۲ + ۶x + ۱ = ۱۰$$

$$\to ۱۰x^۲ + ۱۲x = ۰ \to ۲x(۵x+۶) = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ \\ ۵x + ۶ = ۰ \to x = \frac{-۶}{۵} \end{cases}$$

اگر $x = ۰ \to B = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$

اگر $x = \frac{-۶}{۵} \to B = \begin{bmatrix} -\frac{۶}{۵} \\ ۳(\frac{-۶}{۵}) - ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۶}{۵} \\ -\frac{۲۳}{۵} \end{bmatrix}$

.۴۵

می‌دانیم معادله‌ی نیم‌ساز ربع اول و سوم برابر $y=x$ می‌باشد، فرض کنیم نقطه‌ی A روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $(y=x)$ باشد پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} A=\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \\ B=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \to |AB|=\sqrt{(x-۳)^۲+(x-۳)^۲}=۴\sqrt{۲}\to\sqrt{۲(x-۳)^۲}=۴\sqrt{۲}\xrightarrow{\text{به}}$$

$$\to \cancel{۲}(x-۳)^۲=۱۶\times\cancel{۲}\to\begin{cases} x-۳=۴\to x=۷ \ \times \ \text{غیرقابل قبول} \\ x-۳=-۴\to x=-۱ \ \checkmark \ \text{قابل قبول} \end{cases}$$

از آن‌جایی که در ربع سوم xها منفی می‌باشند لذا $x=-۱$ قابل قبول است. پس از $A=\begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$.

.۴۶

فرض کنیم x تعداد کتب هنری باشد. با توجه به فرض مسأله تعداد کتاب‌های علمی $\frac{۱۱}{۱۳}x$ است و داریم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{۱۵}\times\frac{۱۱}{۱۳}x+\frac{۱۸}{۱۹}x>۱۰۰۰۰ \\ \frac{۱۴}{۱۵}\times\frac{۱۱}{۱۳}x+\frac{۱}{۱۹}x<۱۰۰۰۰ \end{cases}$$

اولاً دستگاه فوق نشان می‌دهد که x باید مضربی از $۳۷۰۵=۱۹\times۱۳\times۱۵$ باشد.

ثانیاً : اگر هر دو نامعادله‌ی دستگاه را ساده کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۳۷۰۵۰۰۰۰}{۳۷۱۹}<x<\frac{۳۷۰۵۰۰۰۰}{۳۱۲۱}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $۱۱۸۷۱\le x\le ۹۹۶۳$ قرار می‌دهیم $x=۳۷۰۵k$. خواهیم داشت: $۲/۶\le k\le ۳/۲$

که تنها جواب صحیح برای k عبارتست از $k=۳$. پس مقدار x خواهد شد:

$$x=۳\times۳۷۰۵=۱۱۱۱۵$$

یعنی تعداد کتاب‌های هنری ۱۱۱۱۵ و تعداد کتاب‌های علمی $۹۴۰۵=۱۱۱۱۵\times\frac{۱۱}{۱۳}$ می‌باشد.

.۴۷

برای حل این گونه مسایل می‌توانیم از نکته‌ی زیر استفاده کرد:

نکته: اگر $A=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}$ باشد. مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$S=\frac{۱}{۲}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$$

پس با توجه به این نکته داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}|۴(۲-۴)-۶(۴+۲)+۴(-۲-۲)|$$

$$S=\frac{۱}{۲}|-۸-۳۶-۱۶|=\frac{۱}{۲}|-۶۰|=۳۰$$

.۴۸

$$\begin{cases} y-۲x=-۱ \\ y+۳x=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+۲x=۱ \\ y+۳x=۳ \end{cases}$$

$$۵x=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{۵}$$

$$y=۲\times\frac{۴}{۵}-۱=\frac{۸}{۵}-۱=\frac{۳}{۵}$$

.۴۹

الف) کافیست به جای x مقدار ۱۰۰ را قرار دهیم. داریم $C(۱۰۰)=۱۵۰۰۰۰+۲۲۰۰=۱۵۲۲۰۰$ تومان.

ب) همان‌گونه که می‌دانیم شیب این خط برابر است با ۱۵۰۰ و معنی آن این است که وقتی که یک قطعه به تولیدات اضافه شود به اندازه ۱۵۰۰ تومان به ارزش نهایی اضافه می‌شود.

.۵۰

الف)

x یا طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵
y یا محیط	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰

ب) رابطه بین x و y به صورت $y=۴x$ است. چون نمودار آن به شکل یک خط مستقیم است پس این رابطه، خطی است.

ج) محیط مربع از ۸ به ۱۲ تغییر می‌کند. همچنین در حالتی که ضلع از ۳ به ۴ تغییر کند، محیط از ۱۲ به ۱۶ افزایش می‌یابد و در هر دو حالت میزان افزایش محیط، ۴ واحد است. این مقدار، ثابت است.