## پیش‌آزمون مقدماتی

**احتمال یا اندازه‌گیری شانس**

**پدیده تصادفی**

هر اتفاقی که از قبل قابل پیش‌بینی نباشد را یک پدیده تصادفی می‌نامیم. ضربه پنالتی، قرعه‌کشی، انجام یک عمل جراحی و بازی رئال و بارسلونا و ... همه پدیده‌های تصادفی محسوب می‌شوند. چون از قبل نتیجه‌ی آن‌ها مشخص نیست.

**مثال:** موارد زیر همه پدیده‌های تصادفی هستند، زیرا در هر سه آزمایش، نتیجه را از قبل نمی‌دانیم.

الف) آزمایش پرتاب تاس

ب) آزمایش پرتاب سکه

ج) آزمایش تعیین جنسیت

ولی در آزمایش تبخیر آب پس از حرارت دادن آب، نتیجه مشخص است که به آن پدیده قطعی می‌گوییم.

**فضای نمونه‌ای**

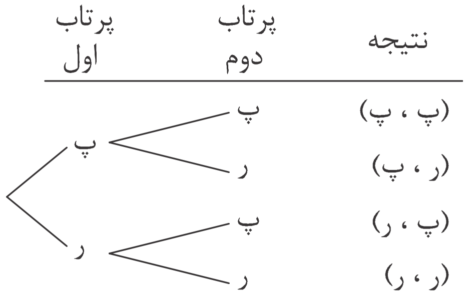
در یک پدیده تصادفی، مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را فضای نمونه‌ای گوییم و آن را با حرف $S$ نمایش می‌دهیم.

**مثال:** در پرتاب سکه فضای نمونه‌ای $S = \{\text{رو ، پشت}\}$ و در پرتاب تاس، فضای نمونه‌ای $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ می‌باشد.

**تذکر:** همواره $S \neq \varnothing$ است و تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم.

**مثال:** یک سکه را دوبار پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی را بنویسید.

در پرتاب اول سکه، پشت یا رو می‌آید که پشت را با «پ» و رو را با «ر» نمایش می‌دهیم. همین اتفاق را در پرتاب دوم داریم و برای راحتی نمودار درختی زیر را رسم می‌کنیم.




فضای نمونه‌ای $S = \{$(ر، پ) و (پ، پ) و (ر ، ر) و (پ ، ر)$\}$

$n(S) = ۲ \times ۲ = ۴$

**مثال:** تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را در پدیده‌های تصادفی زیر مشخص کنید.

الف) پرتاب دو تاس

ب) پرتاب یک تاس و یک سکه

ج) ساختن عدد دو رقمی با ارقام ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ بدون تکرار

د) تولد سه فرزند در خانواده

**حل:**

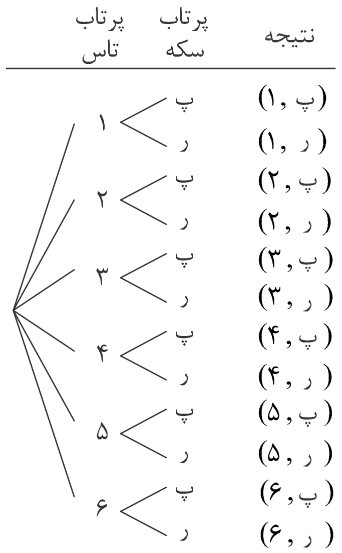
الف) در پرتاب اول اعداد ۱ تا ۶ ظاهر می‌شود و به همین صورت در پرتاب دوم، پس اعضای فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

| تاس اول | تاس دوم | نتیجه |
|---|---|---|
| ۱ | ۱,۲,۳,۴,۵,۶ | (۱,۱)(۱,۲)(۱,۳)(۱,۴)(۱,۵)(۱,۶) |
| ۲ | ۱,۲,۳,۴,۵,۶ | (۲,۱)(۲,۲)(۲,۳)(۲,۴)(۲,۵)(۲,۶) |
| ۳ | ۱,۲,۳,۴,۵,۶ | (۳,۱)(۳,۲)(۳,۳)(۳,۴)(۳,۵)(۳,۶) |
| ۴ | ۱,۲,۳,۴,۵,۶ | (۴,۱)(۴,۲)(۴,۳)(۴,۴)(۴,۵)(۴,۶) |
| ۵ | ۱,۲,۳,۴,۵,۶ | (۵,۱)(۵,۲)(۵,۳)(۵,۴)(۵,۵)(۵,۶) |
| ۶ | ۱,۲,۳,۴,۵,۶ | (۶,۱)(۶,۲)(۶,۳)(۶,۴)(۶,۵)(۶,۶) |

$S = \{(۱,۱)(۱,۲), \ldots, (۶,۶)\}$

$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$

ب) در پرتاب تاس و سکه خواهیم داشت:




پس فضای نمونه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$S = \{$(پ, ۱) , (ر,۱) , (پ, ۲) , (ر, ۲) , (پ, ۳), (ر, ۳), (پ, ۴), (ر,۴), (پ, ۵), (ر, ۵), (پ, ۶), (ر, ۶)$\}$

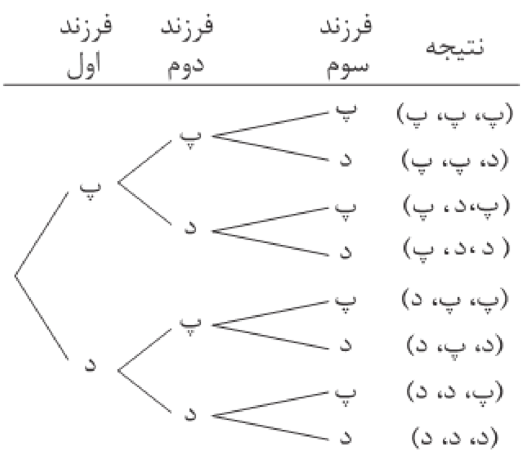
$n(S) = ۶ \times ۲ = ۱۲$

ج) فضای نمونه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$S = \{۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۲۱, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۳۱, ۳۲, ۳۴, ۳۵, ۳۶, ۴۱, ۴۲, ۴۳, ۴۵, ۴۶, ۵۱, ۵۲, ۵۳, ۵۴, ۵۶, ۶۱, ۶۲, ۶۳, ۶۴, ۶۵\}$

$n(S) = ۶ \times ۵ = ۳۰$

د) فرزند اول می‌تواند پسر (پ) یا دختر (د) باشد همین روال برای فرزند دوم و سوم است. پس نمودار درختی آن به‌صورت زیر است.




$S = \{$(پ، پ، پ) (د، پ، پ) (پ، د، پ) (د، د، پ) (پ، پ، د) (د، پ، د) (پ، د، د) (د، د، د)$\}$

$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

**نکته:**

| | |
|---|---|
| تعداد اعضای فضای نمونه‌ای مربوط به پرتاب $n$ سکه (یا یک سکه که $n$ بار پرتاب شود) | $n(S)=۲^{n}$ |
| تعداد اعضای فضای نمونه‌ای مربوط به پرتاب $n$ تاس | $n(S)=۶^{n}$ |
| تعداد اعضای فضای نمونه‌ای مربوط به خارج کردن $k$ مهره از $n$ مهره مختلف | $n(S)=\binom{n}{k}$ |
| تعداد اعضای فضای نمونه‌ای مربوط به $n$ فرزند خانواده | $n(S)=۲^{n}$ |
| تعداد اعضای فضای نمونه‌ای مربوط به روزهای تولد $n$ نفر در طول هفته | $n(S)=۷^{n}$ |

### پیشامد تصادفی

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای را پیشامد تصادفی می‌گوییم. $\varnothing$ (تهی) را پیشامد غیرممکن و $S$ را پیشامد حتمی می‌گوییم. پیشامد غیرممکن مانند طلوع خورشید از سمت مغرب و پیشامد حتمی مانند تبخیر آب در اثر حرارت و رو شدن عدد ۱ تا ۶ در پرتاب تاس.

**مثال:** تعداد پیشامدها در فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه چندتاست؟

**حل:** تعداد پیشامدها برابر همان تعداد زیر مجموعه‌های $S$ می‌باشد، پس تعداد پیشامدها برابر $۲^{n(S)}=۲^{۴}=۱۶$ است.

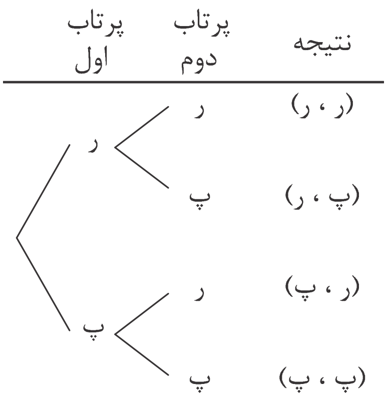
**مثال:** تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم، پیشامد این که مجموع اعداد ظاهر شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد چند عضو دارد؟

**حل:** مجموع اعداد ظاهر شده مضرب ۵ باشد، یعنی جمع اعداد روی دو تاس ۵ یا ۱۰ است و پیشامد $A$ به شکل زیر است:

$$A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$$

$$n(A)=۷$$

**مثال:** یک سکه را دوبار پرتاب می‌کنیم، پیشامد آن را مشخص کنید که فقط یک بار «رو» ظاهر شود:




$S=$ {(ر، ر) و (پ، ر) و (ر، پ) و (پ، پ)}

$A=$ {(پ، ر) و (ر، پ)} $\Rightarrow n(A)=۲$

**مثال:** در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد. دو مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. پیشامد آن را تعیین کنید که یکی از مهره‌ها قرمز و دیگری آبی باشد.

**حل:**

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای $n(S)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!۳!}=۱۰$

تعداد اعضای پیشامد $A$ $n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}=۶$

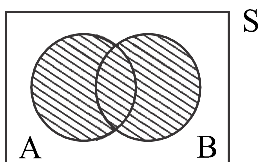
با این توصیف اگر مهره قرمز را با $r$ و مهره آبی را با $b$ نشان دهیم، پیشامد $A$ به صورت زیر خواهد بود.

$$A=\{\{r_۱,b_۱\},\{r_۱,b_۲\},\{r_۲,b_۱\},\{r_۲,b_۲\},\{r_۳,b_۱\},\{r_۳,b_۲\}\}$$

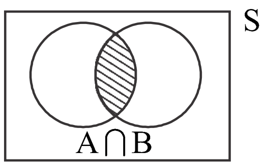
**پیشامدها و برخی اعمال روی آن‌ها**

اگر $A$ و $B$ پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای $S$(مجموعه مرجع) باشند، در این صورت هر یک از پیشامدهای اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم در فضای نمونه‌ای به صورت‌های زیر توصیف می‌شوند:

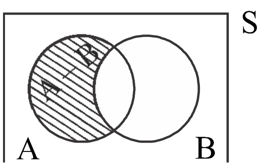
$A\cup B$ : یا $A$ رخ بدهد یا $B$ رخ بدهد یاهر دو رخ بدهند (حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد)



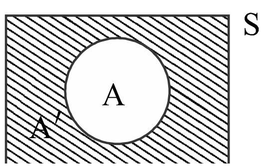

$A\cap B$ :هم $A$ رخ بدهد و هم $B$ رخ بدهد.



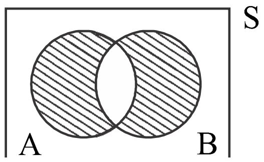

$A-B$ : $A$ رخ بدهد و $B$ رخ ندهد.




$A'$ : $A$ رخ ندهد.



$(A-B)\bigcup(B-A)$: فقط $A$ یا $B$ رخ بدهد




**مثال:** هر یک از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۲ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور قرعه‌کشی بر می‌داریم مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد $A$ که در آن عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.

پ) پیشامد $B$ که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ و زوج باشد.

ت) پیشامد $C$ که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ یا اول باشد.

**حل:**

الف) $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$

ب) $A=\{۵,۱۰\}$

پ) $B=\{۳,۶,۹\}\bigcap\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}=\{۶\}$

ت) $C=\{۳,۶,۹\}\cup\{۲,۳,۵,۷,۱۱\}=\{۲,۳,۵,۶,۷,۹,۱۱\}$

**مثال:** فرض کنیم $A$، $B$ و $C$ سه پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند. با استفاده از جبر مجموعه‌ها و نمودار ون، پیشامدهای زیر را مشخص کنید:

الف) هر سه پیشامد اتفاق بیفتند.

ب) حداقل یکی از پیشامدها اتفاق بیفتد.

پ) فقط پیشامد $A$ اتفاق بیافتد.

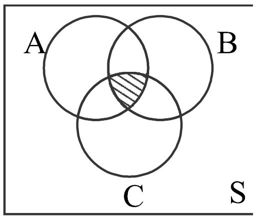
ت) پیشامد $A$ و حداقل یکی از پیشامدهای $B$ و $C$ اتفاق بیافتد.

ث) پیشامد $A$ و $B$ اتفاق بیافتد اما پیشامد $C$ اتفاق نیافتد.

ج) هیچ یک از سه پیشامد اتفاق نیافتد.

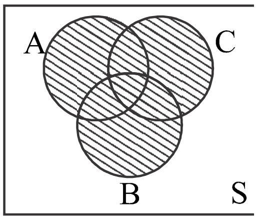
**پاسخ:**

الف) هر سه پیشامد اتفاق بیفتند.



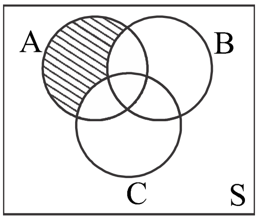

$A \cap B \cap C$

ب) حداقل یکی از پیشامدها اتفاق بیفتد.



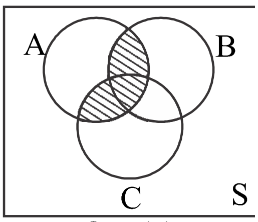

$A \cup B \cup C$

پ) فقط پیشامد $A$ اتفاق بیافتد.



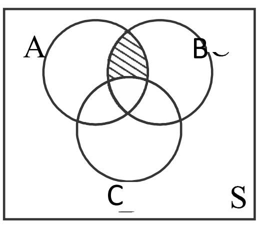

$A - (B \cup C)$

ت) پیشامد $A$ و حداقل یکی از پیشامدهای $B$ و $C$ اتفاق بیافتد.



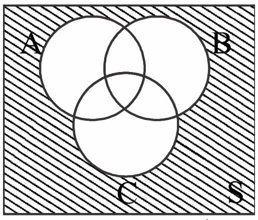

$A \cap (B \cup C)$

ث) پیشامد $A$ و $B$ اتفاق بیافتد اما پیشامد $C$ اتفاق نیافتد.




$(A \cap B) - C$

ج) هیچ یک از سه پیشامد اتفاق نیافتد.




$(A \cup B \cup C)'$

**احتمال رخداد یک پیشامد(اندازه‌گیری شانس)**

اگر $S$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد، احتمال وقوع پیشامد تصادفی $A$ از این فضای نمونه‌ای که آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد}}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

$P(A)$ یک عدد حقیقی بزرگ‌تر مساوی صفر و کوچک‌تر مساوی ۱ می‌باشد در واقع $۰ \leq P(A) \leq ۱$.

**نکته:** با توجه به تعریف بالا داریم:

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = ۱$$

$$P(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = \frac{۰}{n(S)} = ۰$$

**مثال:** در پرتاب یک تاس سالم، احتمال آمدن عدد زوج را محاسبه کنید.

**حل:**

$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ فضای نمونه‌ای این آزمایش

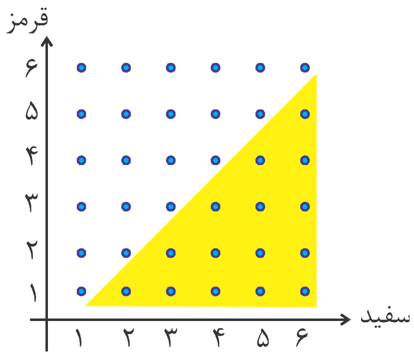
$A = \{۲, ۴, ۶\}$ پیشامد مطلوب

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

**مثال:** دو تاس قرمز و سفید پرتاب می‌شوند. احتمال آن که عدد تاس سفید بزرگ‌تر باشد، چقدر است؟

**حل:** فضای نمونه‌ای کل ۳۶ نقطه است و حالات مطلوب، زوج مرتب‌هایی است که مولفه سفیدشان بزرگ‌تر می‌باشد، پس:

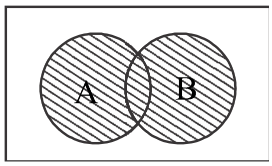
$$P(A)=\frac{۱۵}{۳۶}$$




## قانون جمع احتمالات

اگر $A$ و $B$ دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای $S$ باشند، احتمال این‌که $A$ رخ دهد یا $B$ رخ دهد (حداقل یکی از دو پیشامد $A$ و $B$ رخ دهد) برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$




**مثال:** یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری $A$ و $B$ را می‌پذیرد. ۲۴ درصد از مشتریان کارت نوع $A$، ۶۱ درصد کارت نوع $B$ و ۱۱ درصد هر دو نوع کارت را با خود دارند. چند درصد از مشتریان کارتی دارند که مورد قبول فروشگاه است؟

**حل:**

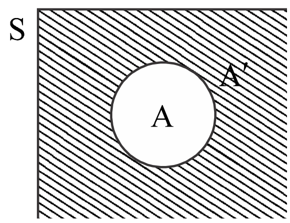
$$P(A)=۰/۲۴ \quad , \quad P(B)=۰/۶۱ \quad , \quad P(A\cap B)=۰/۱۱$$

درصد مشتریانی که حداقل یکی از کارت‌های $A$ یا $B$ دارند عبارتند است از:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۲۴+۰/۶۱-۰/۱۱=۰/۷۴$$

## احتمال پیشامد متمم

گاهی محاسبه متمم یک پیشامد راحت‌تر از محاسبه خود پیشامد است.




$$P(A)=۱-P(A')$$

P(رخ دادن A) = ۱ − P(رخ ندادن A)

زیرا به کمک قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(\underbrace{A\bigcup A'}_{S}) = P(A) + P(A') - P(\underbrace{A\bigcap A'}_{\varnothing}) \Rightarrow ۱ = P(A) + P(A') - ۰$$

$$\Rightarrow P(A) = ۱ - P(A')$$

**مثال:** در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که مجموع دو تاس بیشتر از ۴ باشد، چقدر است؟

**حل:**

مجموع بیشتر از ۴ می‌تواند ۱۲,...,۷,۶,۵ باشد، ولی احتمال مجموعه‌های ۲، ۳ و ۴ را محاسبه می‌کنیم و از کل کم می‌کنیم پس:

$$A' = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۱),(۲,۲),(۱,۳)\}$$

$$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۶}{۳۶} = \frac{۵}{۶}$$

**مثال:** اگر احتمال آمدن باران به نیامدنش $\frac{۲}{۳}$ باشد، آن‌گاه احتمال آمدن باران چقدر است؟

**حل:**

اگر احتمال باران آمدن را $P(A)$ فرض کنیم، احتمال باران نیامدن برابر $۱ - P(A)$ است.

$$\Rightarrow \quad \frac{۲}{۳} = \frac{P(A)}{۱ - P(A)} \quad \Rightarrow \quad ۲ - ۲P(A) = ۳P(A) \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{۲}{۵}$$

**دو پیشامد ناسازگار**

دو پیشامد را ناسازگار گویند، هرگاه عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A$ و $B$ ناسازگارند اگر و تنها اگر $A \cap B = \varnothing$

نتیجه: اگر $A$ و $B$ دو پیشامد ناسازگار باشند، داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**مثال:** دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم. پیشامد $A$ را، حداقل یکی از آن‌ها ۵ بیاید و پیشامد $B$ را، شماره‌های رو شده مساوی باشند در نظر بگیرید، آیا $A$ و $B$ ناسازگارند؟

حل:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),\cdots,(۶,۶)\} \quad \Rightarrow \quad n(S)=۳۶$$

$$A=\{(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۶,۵)\} \quad \Rightarrow \quad n(A)=۱۱$$

$$B=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\} \quad \Rightarrow \quad n(B)=۶$$

$$A\cap B=\{(۵,۵)\}\neq\varnothing$$

پس $A$ و $B$ ناسازگار نیستند (سازگارند).

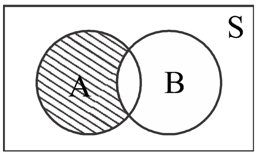
**نکته:** دو پیشامد $A$ و $A'$ ناسازگارند و همچنین اگر $A$ و $B$ ناسازگار باشند، آن‌گاه $A'$ و $B'$ نیز ناسازگارند.

**قانون تفاضل**

اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند:

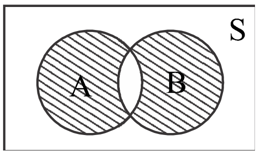
الف) احتمال این که فقط پیشامد $A$ رخ دهد ( $A$ رخ دهد و $B$ رخ ندهد) برابر است با:

$$P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$




ب) احتمال این که فقط یکی از دو پیشامد $A$ و $B$ رخ دهد برابر است با:

$$P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$




**مثال:** عددهای ۱ تا۳۰ را روی ۳۰ کارت هم اندازه نوشته و کارت‌ها را در جعبه‌ای قرار می‌دهیم یک کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال اینکه:

الف) عدد روی کارت بر ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد.

ب) عدد روی کارت بر ۲ یا ۵ بخش‌پذیر باشد.

ج) عدد روی کارت بر ۲ بخش‌پذیر باشد و بر ۵ بخش‌پذیر نباشد.

د) عدد روی کارت فقط بر یکی از عددهای ۲ و ۵ بخش‌پذیر باشد.

و) عدد روی کارت نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۵.

**حل:**

اگر $A$ پیشامد آن باشد که عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر و $B$ پیشامد آن باشد که عدد انتخابی بر ۵ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$A = \{۲,۴,۶,۸,\ldots,۳۰\} \Rightarrow n(A) = ۱۵$$
مضارب ۲ کوچک‌تر یا مساوی ۳۰

$$B = \{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰\} \Rightarrow n(B) = ۶$$
مضارب ۵ کوچک‌تر یا مساوی ۳۰

$$A \cap B = \{۱۰,۲۰,۳۰\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۳$$

الف)

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{۳}{۳۰} = \frac{۱}{۱۰}$$

ب)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۱۵}{۳۰} + \frac{۶}{۳۰} - \frac{۳}{۳۰} = \frac{۱۸}{۳۰} = \frac{۳}{۵}$$

ج)

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۱۵}{۳۰} - \frac{۳}{۳۰} = \frac{۱۲}{۳۰} = \frac{۲}{۵}$$

د)

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۵} - \frac{۱}{۱۰} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

و)

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = ۱ - P(A \cup B) = ۱ - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵}$$

**مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه**

**علم آمار**

مجموعه روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

**جامعه**

جامعه عبارت است از گروهی از افراد، اشیاء یا حوادث که حداقل دارای یک صفت یا ویژگی مشترک هستند. جامعه فقط به گروهی از افراد محدود نمی‌شود، بلکه ممکن است تمام روش‌های آزمایشگاهی، انواع نوشیدنی، انواع محصولات صنعتی یا تمامی ساعت‌هایی که در مسابقات المپیک به کار برده می‌شود یا همه دانش‌آموزانی که امسال در مدرسه ثبت‌نام کرده‌اند، شامل شود.

در پژوهش (که رکن اصلی به وجود آمدن علم آمار است) مفهوم جامعه به تمامی افرادی اطلاق می‌شود که عمل تعمیم‌پذیری در مورد آن‌ها صورت می‌گیرد. ماهیت پژوهش تعیین کننده دامنه جامعه است. از نظر اندازه یا حجم، جامعه ممکن است یک کلاس درس چند نفری یا میلیون‌ها انسان (به عنوان مثال رأی دهندگان در انتخابات) باشد.

فرض کنید علاقمند هستیم متوسط قد دانش‌آموزان پسر ابتدایی را در شهر تهران برآورد کنیم. در این بررسی، جامعه عبارت است از تمامی دانش‌آموزان پسری که در مدارس ابتدایی شهر تهران مشغول تحصیل هستند. در این جامعه ویژگی مشترک عبارت است از تحصیل در مدرسه ابتدایی و پسر بودن. هنگامی که چنین اندازه‌ای (متوسط قد) برای جامعه محاسبه می‌شود، پارامتر نامیده می‌شود. پارامتر عبارت است از ویژگی عددی یک جامعه. اگر متوسط قد دانش‌آموزان پسر ابتدایی شهر تهران را محاسبه کنیم یا در دست داشته باشیم، این اندازه پارامتر جامعه (شهر تهران) خواهد بود.

**نمونه**

چون حجم یا اندازه اکثر جامعه‌های تحقیقی بسیار بزرگ هستند، بنابراین اندازه‌گیری ویژگی مورد پژوهش برای تک تک افراد یا عناصر جامعه غیرممکن است. به عنوان مثال، اندازه‌گیری قد تمامی ورزشکاران شیرازی غیرممکن است، یا اندازه‌گیری نگرش همه دانشجویان دانشگاه‌های ایران نسبت به تحصیلات دانشگاهی به هزینه و وقت زیاد نیاز دارد. خوشبختانه به طور معمول اندازه گیری ویژگی مورد پژوهش برای تک تک اعضای جامعه ضروری نیست؛ بلکه کافی است تا نمونه‌ای از جامعه انتخاب و اندازه‌گیری شود و براساس یافته‌های حاصل از نمونه، این نتایج به کل جامعه تعمیم داده شود. پس می‌توان گفت نمونه عبارت است از زیر جامعه‌ای که از کل جامعه انتخاب می‌شود و معرف آن است. به عنوان مثال، در صورتی که دو میلیون نفر در یک انتخابات شرکت کنند، چنانچه ۴۰۰ یا ۵۰۰ هزار نفر از این عده انتخاب شوند، این عده نمونه‌ای را تشکیل می‌دهند که معرف جامعه است. از اندازه‌ها و اطلاعاتی که از نمونه به دست می‌آیند، به منظور برآورد ویژگی کل جامعه استفاده می‌شود.

اولین قدم در پژوهش علمی، تعریف جامعه براساس ویژگی مورد علاقه و سپس انتخاب یک نمونه از این جامعه با استفاده از روش‌های مناسب است.

فرض کنید بخواهیم وزن دانش آموزان یک شهر بزرگ را مورد مطالعه قرار دهیم. برای بررسی این موضوع به تمام دانش‌آموزان مدارس دسترسی نداریم و یا دسترسی به همه دانش‌آموزان بسیار زمان بر و هزینه زاست.

پس لازم است از طریق نمونه‌گیری و مطالعه‌ی نمونه، این بررسی انجام شود. اما فرض کنید بخواهیم وزن دانش‌آموزان یک روستای ۲۰۰ نفری را مورد بررسی و مطالعه قرار دهیم. در این مورد می‌توانیم تک به تک دانش‌آموزان را از لحاظ وزنی مورد مطالعه و اندازه‌گیری قرار دهیم و جامعه‌ی مورد مطالعه ما تمام دانش‌آموزان این روستا باشند. پس در نتیجه می‌توانیم نتایج مطالعه خود را بسیار دقیق ارائه دهیم زیرا سرشماری کرده‌ایم.

به اصطلاحات زیر دقت کنید:

**جامعه آماری:** جامعه‌ی آماری مجموعه‌ای از افراد یا اشیا است که درباره‌ی اعضای آن می‌خواهیم موضوع یا موضوعاتی را مطالعه کنیم.

مثال: جامعه آماری می‌تواند مجموعه‌ی دبیران استان تهران و موضوع مورد مطالعه، میزان اطلاعات عمومی آن‌ها باشد.

-**سرشماری:** اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، سرشماری کرده‌ایم.

-**نمونه‌گیری:** به دلیل در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه، وقت گیر بودن دسترسی به تمام اعضای جامعه، گران تمام شدن بررسی تمام اعضای جامعه و از بین رفتن جامعه در برخی از مطالعات، به جای سرشماری از نمونه‌گیری برای بررسی ویژگی جامعه استفاده می‌کنیم. یعنی بخشی از جامعه را با دقت لازم انتخاب می‌کنیم و بررسی لازم را روی آن بخش انجام می‌دهیم و سپس نتایج بدست آمده را به کل جامعه تعمیم می‌دهیم. این بخش کوچک از جامعه‌ی آماری را نمونه می‌گوییم. نمونه‌گیری مهم‌ترین بخش در روش‌های آماری محسوب می‌شود.

نمونه‌گیری باید با دقت زیاد و شیوه‌ای خاص صورت پذیرد تا نتایج به دست آمده با واقعیت مطابقت داشته باشد. هر نمونه باید طوری انتخاب شود که:

الف) نماینده جامعه باشد، یعنی بیان‌گر تمام ویژگی‌های جامعه مورد مطالعه باشد.

ب) یک دست باشد، یعنی اگر جامعه از اقشار و طبقات مختلف تشکیل شده است، از هر قشر و طبقه حتماً نماینده‌ای در نمونه باشد.

تذکر: تعداد اعضای جامعه را اندازه‌ی جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه‌ی نمونه می گویند.

مثال: اگر بخواهیم در مورد میزان درآمد افراد ساکن در یک شهر مطالعه‌ای انجام دهیم، بایستی نمونه به گونه‌ای انتخاب شود که شامل افراد با درآمد کم، متوسط و زیاد به نسبت موجود در جمعیت باشد.

ج) به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد تا نتایج به دست آمده به واقعیت نزدیک‌تر باشد.

مثال: اگر بخواهیم در مورد میانگین نسبی جمعیت یک کشور چند میلیون نفری مطالعه کنیم، نتایج حاصل از یک نمونه ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ نفری نمی‌تواند بیانگر واقعیت باشد.

د) هر نمونه به تصادف انتخاب شده باشد، یعنی شانس همه ی اعضای جامعه برای انتخاب شدن در یک نمونه مساوی باشد.

مثال: در یک بررسی، هدف این است که نتایج یک انتخابات قبل از رأی‌گیری پیش بینی شود. در این بررسی چون دسترسی به رأی تمام مردم وجود ندارد از نمونه‌گیری استفاده می‌شود. فرض کنید نمونه‌ی انتخابی مردمی باشند که در خیابان از آن‌ها نظرخواهی می‌شود. این نمونه، نمونه مناسبی نیست. زیرا مصاحبه کنندگان گرایش دارند مردمی را که متشخص‌تر و خوش لباس‌ترند، انتخاب کنند و در ضمن برای قشر زنان خانه‌داری که در آن ساعت در منزلشان هستند، شانسی برای نظرخواهی وجود ندارد.

**متغیر و انواع آن**

پس از برگزاری مسابقات فوتبال جام جهانی، مسئولان فیفا (فدراسیون جهانی فوتبال) می‌خواهند میزان دوندگی داوران ـ رنگ پوست بازیکنان ـ وزن مربیان ـ تعداد بازیکنان مصدوم این دوره و هم‌چنین رده سنی بازیکنان موجود در جام را مورد بررسی قرار دهند.

همان‌طور که می‌بینید بعضی از این موارد قابل اندازه‌گیری و بعضی دیگر مشهود و قابل لمس هستند. بعضی از این موارد عددهای خاصی را می‌طلبند و بعضی دیگر هر عددی را می‌توانند نشان دهند.

هر متغیری می‌تواند راستا و جهت مطالعه و تحقیق خود را تعیین کند و به ما نشان دهد که از چه طریقی به راحتی می‌توانیم به هدفمان برسیم.

**متغیر تصادفی:** در بررسی جامعه‌ی آماری پس از انتخاب نمونه‌ی تصادفی، می‌خواهیم یک ویژگی یا خصوصیت از اعضای جامعه را مورد بررسی قرار دهیم. این ویژگی از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند، بنابراین یک متغیر است. اگر نمونه‌ی انتخابی، نمونه‌ی تصادفی باشد، ویژگی مورد بررسی را متغیر تصادفی می‌نامیم.

**مثال:**سابقه‌ی کار سرمربیان کشتی در مازندران یا گروه خونی دانش‌آموزان یک منطقه در تهران

**انواع متغیرهای تصادفی:**

متغیرهای تصادفی را می‌توان به دو دسته‌ی کمی و کیفی تقسیم کرد که هریک زیرمجموعه‌هایی دارند.

**الف) متغیرهای کمی:** متغیرهای هستند که قابل اندازه‌گیری می‌باشند و عدد به آن‌ها نسبت داده می‌شود مانند: وزن، قد، جرم، جمعیت و ...

* متغیرهای کمی خود به دودسته تقسیم می‌شوند:

**۱): متغیر کمی گسسته (شمارشی):**

به متغیرهایی که پیوسته نباشند، گسسته می‌گوییم. (که می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.)

* معمولا متغیرهای گسسته از نوع تعداد هستند. مانند تعداد دانش‌آموزان مردودی یک استان، (توجه کنید که این تعداد نمی‌تواند مثلا ۴/۵ شود.).

* متغیرهای گسسته گاهی فقط شامل اعداد صحیح مثبت نیستند، مانند تعداد طبقات یک ساختمان (چون به طبقاتی که به طورکامل ساخته نمی‌شوند نیم طبقه می‌گویند و این متغیر می‌تواند مقداری مانند ۳/۵ را اختیار کند.) به‌طور کلی متغیر کمی گسسته باید قابل شمارش باشد.

**۲): متغیر کمی پیوسته:**

یک متغیر کمی است که اگر دو مقدار $b,a$ را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. مانند وزن دانش‌آموزان یک استان (چون تمام مقادیر واقع در یک بازه مثلا بین ۴۰ تا ۷۰ اعم از صحیح و اعشاری را می‌تواند اتخاذ کند.)

**ب): متغیر کیفی:** متغیری که قابل اندازه‌گیری نباشد و نوع آن تعیین شود، متغیر کیفی نام دارد. مانند رنگ چشم دانشجویان یک شهر.

* متغیرهای کیفی نیز به دو دسته تقسیم می‌شوند:

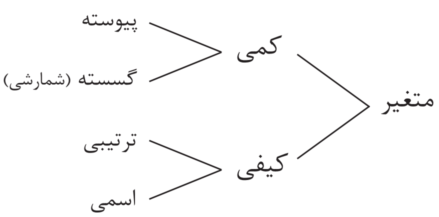
**۱): متغیر کیفی ترتیبی:**

متغیرهای کیفی که در آن‌ها نوعی ترتیب طبیعی وجود دارد را متغیر کیفی ترتیبی می‌نامند. مانند مراحل تحصیل که در آن ابتدایی دوره اول قبل از ابتدایی دوره دوم و متوسطه دوره اول و متوسطه دوره دوم بعد آن‌هایند. یا به عنوان مثال دیگر مراحل رشد یک انسان: جنین ← نوزاد ← کودک ← نوجوان ← جوان ← میانسال ← کهنسال.

**۲): متغیر کیفی اسمی:**

متغیر کیفی که ترتیبی نباشد، متغیر کیفی اسمی نامیده می‌شود. مانند رنگ چشم یا گروه خونی دانش‌آموزان یک استان (چون رابطه ترتیبی در آن‌ها تعریف نشده است).

به‌طور کامل می‌توانیم متغیرها را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم:




**پیشامد مستقل:**

دو پیشامد $A$ و $B$ از فضای نمونه‌ای $S$ را مستقل گوییم، هرگاه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

به عبارت دیگر دو پیشامد مستقل هستند، هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی، در دیگری تأثیری نداشته باشد.

**مثال:** دو تاس متمایز را پرتاب می‌کنیم و پیشامد $A$ را (مجموع دو شماره کمتر از ۵ باشد) و پیشامد $B$ را (حداقل یکی از تاس‌ها ۳ باشد) تعریف می‌کنیم.

ب) آیا دو پیشامد ناسازگارند؟

ب) آیا دو پیشامد مستقل‌اند؟

**حل:**

$S = \{(۱,۱),(۱,۲),\ldots,(۶,۶)\}$ فضای نمونه پرتاب دو تاس $\Rightarrow n(S) = ۳۶$

$A = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$ پیشامد مجموع کمتر از ۵ $\Rightarrow n(A) = ۶$

$B = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۱,۳),(۲,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۶,۳)\} \Rightarrow n(B) = ۱۱$

$A \cap B = \{(۳,۱),(۱,۳)\} \quad \Rightarrow n(A \cap B) = ۲$

الف) چون $A\cap B\neq\varnothing$ است پس $B$ و $A$ ناسازگار نیستند. (سازگارند)

ب) شرط مستقل بودن $B$ و $A$ آن است که $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ داریم:

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$$
$$P(A)P(B)=\frac{۶}{۳۶}\times\frac{۱۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱۱}{۳۶}=\frac{۱۱}{۲۱۶}$$
$$\Rightarrow\quad P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

پس $B$ و $A$ مستقل نیستند.

**احتمال غیر هم شانس:**

در حالت کلی (حالتی که پیشامدها دارای شانس اتفاق افتادن برابر نباشند) فرض کنید فضای نمونه‌ای ما $S=\{e_۱,e_۲,\dots,e_n\}$ شامل $n$ عضو باشد. به هر پیشامد ساده‌ی $\{e_k\}$ یک عدد حقیقی $P(\{e_k\})$ که احتمال پیشامد $\{e_k\}$ است، نسبت می‌دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد:

الف) $۰\leq P(\{e_k\})\leq ۱$

ب) $\sum_{i=۱}^{n}P(\{e_i\})=۱$

اعداد $P(\{e_۱\})\,,\,P\{(e_۲\})\,,\dots,\,P(\{e_n\})$ را که در شرایط بالا صدق می‌کنند، تخصیص احتمال مقبول می‌گویند و اگر دو شرط بالا صادق نباشند، تخصیص احتمال مجاز نیست.

**مثال:** احتمال رو شدن هر وجه از یک تاس غیر همگن، متناسب با تعداد خال‌هایی است که روی آن حک شده است. احتمال آن که در یک بار پرتاب آن، عدد اول ظاهر شود چقدر است؟

**حل:**

$$\frac{P(۱)}{۱}=\frac{P(۲)}{۲}=\frac{P(۳)}{۳}=\frac{P(۴)}{۴}=\frac{P(۵)}{۵}=\frac{P(۶)}{۶}=k$$

$$\Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$\Rightarrow\quad k+۲k+۳k+۴k+۵k+۶k=۱$$
$$\Rightarrow\quad k=\frac{۱}{۲۱}\quad\Rightarrow\quad P(۲\cup۳\cup۵)=\frac{۲}{۲۱}+\frac{۳}{۲۱}+\frac{۵}{۲۱}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

**مثال**

1. **هر یک از اعداد زوج طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به طور قرعه بر می‌داریم مطلوبست تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی

ب) پیشامد $A$ که در آن عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.

پ) پیشامد $B$ که در آن عدد روی کارت کوچک‌تر از ۶ باشد.

ت) پیشامد $A' \bigcap B$

پاسخ:

الف) $S = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰\}$

ب) $A = \{۱۰,۲۰\}$

پ) $B = \{۲,۴\}$

ت) $A' \bigcap B = \{۲,۴\}$

2. **ارقام ۵,۳,۰,۹ را در نظر بگیرید مطلوب است تعیین:**

الف) فضای نمونه‌ای $S$ که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد $A$ آن که اعداد دو رقمی مضرب ۵ باشد.

پ) پیشامد $B$ آن که اعداد دو رقمی بزرگ‌تر از ۵۰ باشد.

ت) پیشامد $A \bigcap B'$

پاسخ:

الف) $S = \{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰,۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$

ب) $A = \{۳۰,۳۵,۵۰,۹۰,۹۵\}$

پ) $B = \{۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$

ت) $B' = \{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰\} \Rightarrow A \bigcap B' = \{۳۰,۳۵,۵۰\}$

3. **چهار سکه را با هم پرتاب می‌کنیم مطلوب است:**

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای این تجربه تصادفی

ب) پیشامد $A$ که در آن حداقل سه بار رو بیاید.

ج) پیشامد $B$ که در آن فقط یک بار پشت بیاید.

د) پیشامد $A - B$ را بیابید.

پاسخ:

الف) $n(S) = ۲^۴ = ۱۶$

ب) $A = \{$(ر، ر، ر، ر) و (ر، ر، ر، پ) و (ر، ر، پ، ر) و (ر، پ، ر، ر) و (پ، ر، ر، ر)$\}$

ج) $B = \{$(ر، ر، ر، پ) و (ر، ر، پ، ر) و (ر، پ، ر، ر) و (پ، ر، ر، ر)$\}$

د) $A - B = \{$(ر، ر، ر، ر)$\}$

**۴. در جعبه‌ای ۶ مهره آبی و ۴ مهره سفید موجود است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که:**

الف) حداقل ۲ مهره آبی باشند.

ب) هیچ کدام از مهره‌ها آبی نباشند.

پاسخ:

الف)
$$P(A) = \frac{\binom{۶}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۶}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۱۵ \times ۴ + ۲۰}{۱۲۰} = \frac{۲}{۳}$$

ب)
$$P(B) = P\,(\text{هیچ کدام مهره آبی = هر سه مهره سفید}) = \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۴}{۱۲۰} = \frac{۱}{۳۰}$$

**۵.** اگر $P(A) = \frac{۲}{۵}$ و $P(B) = \frac{۳}{۵}$ و $P(A \cup B) = \frac{۴}{۵}$، در این صورت $P(A \cap B')$ را محاسبه کنید.

**پاسخ:**

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{۱}{۵}$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۵}$$

۶. احتمال این که دانش‌آموزی در درس ریاضی ۳ قبول شود ۳۴ و احتمال این که در درس زیست شناسی قبول شود ۲۳ است و احتمال این که دست کم در یکی از این دو درس قبول شود ۳۸ است. احتمال این که این دانش‌آموز در هر دو درس قبول شود چقدر است؟

پاسخ:

$$P(A)= ۳۴ = ۳۴$$

$$P(B)= ۲۳$$

$$P(A\cup B)= ۳۸$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$۳۸ = ۳۴ + ۲۳ - P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)= ۳۴ + ۲۳ - ۳۸$$

$$P(A\cap B)= ۵۷ - ۳۸ \Rightarrow P(A\cap B)= ۱۹$$

۷. تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آوردن عددهای فرد پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است. احتمال آمدن هر کدام از اعداد را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$P(۲)=P(۴)=P(۶)=W$$

$$P(۱)=P(۳)=P(۵)=۵W$$

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$

$$۵W+W+۵W+W+۵W+W=۱ \Rightarrow ۱۸W=۱ \Rightarrow W=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(۱)=P(۳)=P(۵)=۵(\frac{۱}{۱۸})=\frac{۵}{۱۸}$$

$$\Rightarrow P(۲)=P(۴)=P(۶)=\frac{۱}{۱۸}$$

۸. برای دو پیشامد $A$ و $B$ از فضای نمونه‌ای $S$ ثابت کنید:

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

**پاسخ:**

می‌دانیم: $A=(A-B)\bigcup(A\bigcap B)=(A\bigcap B')\bigcup(A\bigcap B)$

از طرفی دو پیشامد $A\bigcap B'$ و $A\bigcap B$ از هم جدا هستند لذا داریم:

$$P(A)=P(A\bigcap B')+P(A\bigcap B)$$

$$P(A\bigcap B')=P(A)-P(A\bigcap B)$$

**۹. سکه سالمی را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که ۷ بار رو بیاید.**

**پاسخ:**

$$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۷}}{۲^{۱۰}}$$

**۱۰. در یک کلاس ۳۲ نفر دانش‌آموز در ۴ ردیف ۸ نفری روی نیمکت نشسته‌اند. به طور تصادفی ۲ نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که:**

الف) هر دو از ردیف اول باشند.

ب) یکی از ردیف اول و یکی از ردیف دوم باشد.

پاسخ:

$$n(S)=\binom{۳۲}{۲}$$

الف) $P(A)=\dfrac{\binom{۸}{۲}}{\binom{۳۲}{۲}}$

ب) $P(B)=\dfrac{\binom{۸}{۱}\binom{۸}{۱}}{\binom{۳۲}{۲}}$

۱۱. اگر $P(A)=۰/۳$، $P(B')=۰/۴$ و $P(A\cup B)=۰/۷$ مطلوب است $P(A'\cap B')$

۱۲. اگر داشته باشیم $A\subseteq B$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

پاسخ:

با استفاده از شکل می‌دانیم:

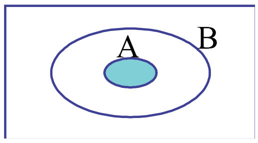
$$B=(B-A)\cup A$$

همچنین $A\cap(B-A)=\phi$ می‌باشد در نتیجه:

$$P(B)=P((B-A)\cup A)$$

$$P(B)=P(B-A)+P(A)$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$




۱۳. فرض می‌کنیم ۲۵ مردم یک شهر روزنامه (الف) و ۲۰ روزنامه (ب) و ۸ هر دو روزنامه را می‌خوانند. اگر شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود، احتمال این که هیچ یک از این روزنامه‌ها را نخواند چقدر است؟

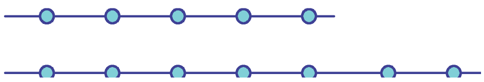
پاسخ:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=۲۵+۲۰-۸=۳۷$$

$$P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)=۱-۳۷=۶۳$$

۱۴. دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند. از این نقطه‌ها سه نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این که این سه نقطه رأس‌های یک مثلث باشند را به‌دست آورید.



پاسخ:

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۲}+\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۵\times۲۱+۱۰\times۷}{۲۲۰}=\frac{۱۷۵}{۲۲۰}=\frac{۳۵}{۴۴}$$

**۱۵. اگر یک عدد سه رقمی از کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴,۳,۲,۱,۰ به‌وجود آید، احتمال این که این عدد زوج باشد چقدر است؟**

**پاسخ:**

فضای نمونه‌ای شامل همه‌ی اعداد ۳ رقمی با رقم‌های متمایز با ارقام ۴,۳,۲,۱,۰ است. طبق اصل ضرب تعداد چنین اعدادی برابر است با:

$$\boxed{۴}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۴۸ \quad \Rightarrow \quad |S|=۴۸$$

هم‌چنین پیشامد $A$ شامل همه‌ی اعداد زوج از بین اعداد فوق است. برای به‌دست آوردن آن‌ها باید دو حالت را در نظر بگیریم حالت (۱) این که رقم یکان، صفر باشد و حالت (۲) این‌که رقم یکان ۲ یا ۴ باشد. پس بنابه اصل ضرب:

$$\left.\begin{array}{ll} (۱) & \boxed{۴}\times\boxed{۳}\times\boxed{۱}=۱۲ \\ (۲) & \boxed{۳}\times\boxed{۳}\times\boxed{۲}=۱۸ \end{array}\right\} \Rightarrow \quad |A|=۱۲+۱۸=۳۰$$

$$P(A)=\frac{|A|}{|S|}=\frac{۳۰}{۴۸}=\frac{۵}{۸}$$