پیش‌آزمون مقدماتی

اصل لانه کبوتری

اصل لانه‌ی کبوتری: اگر قرار باشد $n+1$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند در یک خانه حداقل ۲ کبوتر قرار می‌گیرد.

اثبات: اگر قرار باشد در هر لانه حداکثر ۱ کبوتر باشد در کل حداکثر n کبوتر وجود دارد که با صورت‌مسئله در تناقض است.

حالت‌های کلی‌تر اصل لانه کبوتری نیز وجود دارد که به راحتی قابل بیان است.

صورت کلی‌تر: اگر بیش‌تر از nm کبوتر قرار باشد در n خانه قرار بگیرند در یک خانه حداقل $m+1$ کبوتر قرار خواهد گرفت.

اثبات: اگر قرار باشد در هر خانه حداکثر m کبوتر باشد در کل حداکثر nm کبوتر وجود دارد که با صورت‌مسئله در تناقض است.

صورتی خیلی کلی‌تر: اگر n کبوتر در m لانه قرار گیرد در یک لانه حداقل $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ کبوتر قرار می‌گیرد.

(منظور از $\lceil x \rceil$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگتر مساوی x است)

اثبات: مشابه حالات قبل در مسائل زیادی در المپیاد به اصل لانه کبوتری سر و کار داریم. البته مسائل در قالب کبوتر و خانه ظاهر نمی‌شود اما باید تلاش کرد که کبوتر و خانه را در مفاهیم دیگر یافت. سعی می‌کنیم با مثال‌هایی این مفهوم را بررسی کنیم.

سؤال ۱: در تهران هر نفر حداکثر ۱۰۰۰۰۰ مو دارد. جمعیت شهر تهران ۸۰۰۰۰۰۰ نفر است. ثابت کنید ۸۰ نفر وجود دارند که تعداد موهای برابری دارند. آیا گزاره برای ۸۱ درست است؟

حل: در این مسئله افراد شهر تهران مانند کبوتر و تعداد موها مانند لانه قرار می‌گیرد و هم‌خانه‌ای بودن معادل داشتن تعداد موهای یکسان است. پس طبق لانه کبوتری در یک لانه حداقل $۸۰ = \left\lceil \frac{۸۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰} \right\rceil$ کبوتر قرار می‌گیرد.

سؤال ۲: از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۱۱\}$ هفت عدد انتخاب می‌کنیم ثابت کنید جمع ۲ تا از این اعداد برابر ۱۱ است.

در این سؤال کبوترها و لانه‌ها پیچیده‌تر هستند!

اعداد $۱,۲,\ldots,۱۱$ را به دسته‌های زیر تقسیم می‌کنیم:

$$\{۱,۱۰\},\{۲,۹\},\{۳,۸\},\{۴,۷\},\{۵,۶\},\{۱۱\}$$

حال لانه‌ها همین ۶ مجموعه هستند و کبوترها همان هفت عدد هستند. حال ۶ لانه و ۷ کبوتر داریم. پس ۲ عدد در یک دسته قرار می‌گیرند. (طبق اصل لانه کبوتری) پس جمع ۲ عدد برابر ۱۱ می‌شود!

سؤال ۳: از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\ldots,۲۵\}$ چهارده عدد انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید یکی از این اعداد بر دیگری بخش‌پذیر است.

حل: دوباره مانند سؤال قبل، باید لانه‌ها و کبوترها را بیابیم!

اعداد را به دسته‌های زیر تقسیم کنید.

$$\{۱,۲,۴,۸,۱۶\},\{۳,۶,۱۲,۲۴\},\{۵,۱۰,۲۰\},\{۷,۱۴\},\{۹,۱۸\},\{۱۱,۲۲\},\{۱۳\},\{۱۵\},\{۱۷\},\{۱۹\},\{۲۱\},\{۲۳\},\{۲۵\}$$

حال ۱۴ عدد انتخاب شده‌ی ما در ۱۳ گروه قرار می‌گیرند. اگر لانه‌ها را این ۱۳ گروه و کبوترها را همان ۱۴ عدد در نظر بگیریم. طبق اصل لانه‌ی کبوتری دو عدد در یک دسته قرار می‌گیرند پس چون دسته‌ها به‌صورتی هستند که در هر دسته هر دو عدد را که در نظر بگیریم یکی مضرب دیگری است پس مسأله حل شد.

نکته: دقت کنید که همواره باید دسته‌ها را طوری دسته‌بندی کنید که به هدف مسأله برسید. برای مثال در این مثال دسته‌ها را طوری تقسیم کردیم که در هر دسته هر دو عدد بر هم بخش‌پذیر هستند. در سؤال دوم دسته‌ها را طوری تقسیم‌بندی کردیم که جمع هر دو عدد ۱۱ می‌شود.

سؤال ۴: ثابت کنید اگر از مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد $۲^{۷} \times ۳^{۸} \times ۵^{۳}$ نه عدد انتخاب کنیم حاصل‌ضرب ۲ تا از این اعداد مربع کامل می‌شو.

حل: دوباره به یافتن لانه‌ها و کبوترها می‌پردازیم!!!

هر مقسوم‌علیه این عدد به شکل $۲^{\alpha} \times ۳^{\beta} \times ۵^{\gamma}$ است. این مقسوم‌علیه را این‌گونه به ۸ دسته تقسیم می‌کنیم. دسته‌ها را بر حسب زوج و فرد بودن α و β و γ تقسیم می‌کنیم، برای مثال دسته‌ی اول (فرد و فرد و فرد) $\rightarrow$ (γ و β و α) و دسته‌ی دوم (زوج و فرد و فرد) $(\alpha,\beta,\gamma) \rightarrow$ و دسته‌های بعدی به همین منوال.

مشخص است که هشت گروه داریم. حال چون نه عدد داریم اگر لانه‌ها را این دسته‌ها و کبوترها را ۹ عدد در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری دو عدد در یک دسته قرار می‌گیرد. اما دسته‌ها به‌گونه‌ای هستند که حاصل‌ضرب هر دو عدد در یک دسته قطعاً مربع کامل است. پس مسأله حل شد.

سؤال ۵: ۵۱ عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۱۵۰\}$ انتخاب می‌کنیم ثابت کنید دو تا از این اعداد وجود دارند مثل x, y که $|x-y| \leq ۲$.

حل: مانند مسائل قبل مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۱۵۰\}$ را به دسته‌های مناسب تقسیم می‌کنیم.

دسته‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$\{۱,۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\ldots,\{۱۴۸,۱۴۹,۱۵۰\}$$

حال ۵۰ دسته داریم. ۵۱ عدد در ۵۰ دسته قرار می‌گیرند. طبق اصل لانه کبوتری دو تا از این اعداد در یک دسته قرار می‌گیرند. اما ۲ عدد در یک دسته در خاصیت $|x-y| \leq ۲$ صدق می‌کند پس مسئله حل شد.

سؤال ۶: ثابت کنید در هر مجموعه از اعداد طبیعی با n عضو جمع تعدادی از اعضا مضربی از n می‌شود.

حل: قرار دهید $A=\{x_۱,x_۲,\ldots x_n\}$.

کبوترها و لانه‌ها در این سؤال کمی عجیب‌تر از سؤال‌های قبل هستند. اعداد زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{l} x_۱ \\ x_۱+x_۲ \\ \vdots \\ x_۱+x_۲+\ldots+x_n \end{array}$$

در حال حاضر n عدد داریم. اگر یکی از این اعداد مضربی از n بود که مسئله حل است.

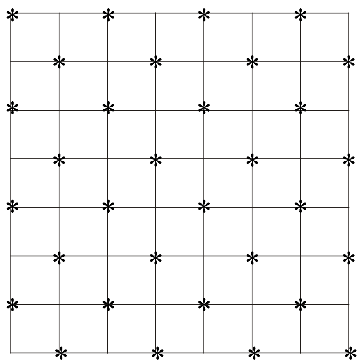
پس باقیمانده‌ی این n عدد بر عدد n یکی از اعداد ۱، ۲، ... و $n-۱$ هستند. حال n عدد داریم که مجموعه‌ی باقی‌مانده‌های آن‌ها $n-۱$ عدد است. حال اگر لانه‌ها را همان باقی‌مانده‌ها و کبوترها را n عدد بگیریم. دو عدد طبق اصل لانه‌ی کبوتری یافت می‌شوند که باقی‌مانده‌ی یکسانی دارند.

فرض کنید $x_۱+\ldots+x_i$ و $x_۱+\ldots+x_j$ باقیمانده‌های یکسانی نسبت به n دارند اگر $i<j$ باشد $x_{i+۱}+\ldots+x_j$ بر n بخش‌پذیر است. پس مسأله حل شد.

سؤال ۷: ۶۵ مورچه داخل یک مربع به ضلع ۱ قرار دارند. ثابت کنید ۳تا از آن‌ها را می‌توان در داخل یک دایره به شعاع $\frac{۱}{۷}$ گیر انداخت؟

حل: در این‌جا لانه‌های کبوترها خیلی عجیب‌تر هستند.

مربع ۱×۱ را به ۴۹ مربع به ضلع $\frac{۱}{۷}$ تقسیم کنید.



حال به مرکز خانه‌های ستاره‌زده شده در شکل دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۷}$ بزنید. تمام شکل پوشیده می‌شود. حال در کل ۳۲ دایره داریم. (این‌ها لانه‌ها هستند.) ولی ۶۵ مورچه (کبوتر)

پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری در یک دسته $\left\lceil\frac{۶۵}{۳۲}\right\rceil=۳$ مورچه قرار می‌گیرد.

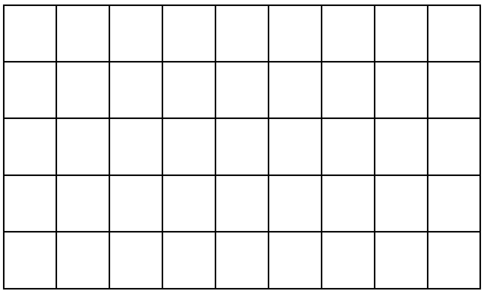
مسائل تکمیلی

۱ـ حداقل چند عدد طبیعی انتخاب کنیم تا مطمئن شویم تفاضل ۲ عدد بر ۵ و ۹ بخش‌پذیر است؟

حل) عددی که هم بر ۵ و بر ۹ بخش‌پذیر باشد چون ۵ و ۹ نسبت به اول هستند بر حاصل ضرب آنها یعنی ۴۵ بخش‌پذیر است. اگر اعداد طبیعی را بعنوان کبوتر و ۴۵ خانه موجود در شکل را بعنوان لانه کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه و کبوتری داریم؟

$[(2-1)\times 45]+1=46$

پس حداقل ۴۶ عدد طبیعی باید انتخاب کنیم.



۲ـ در کدام مجموعه لااقل دو عضو دارای باقی‌مانده‌ی یکسان بر عدد ۱۰ هستند؟

۱) $\{a^{10}, a^{10}+1, a^{10}+2, .. a^{10}+9\}$ ۲) $\{a-9, a-8, ..., a\}$

۳) $\{a+b, a+b+11, ..., a+b+99\}$ ۴) $\{a, a+1, ..., a+10\}$

حل) اگر اعضای مجموعه‌های ذکر شده در گزینه‌ها را بعنوان کبوتر و باقی‌مانده آنها بر ۱۰ که عبارتست از $\{0,1,2,3,...,9\}$ را بعنوان لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم طبق اصلا لانه کبوتری باید تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر باشد چون تعداد اعضای مجموعه‌های داده شده در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ برابر ۱۰ می‌باشد ولی در گزینه ۴ تعداد اعضاء ۱۱ است بنا به اصل لانه کبوتری داریم؟

$\begin{array}{r|l} 11 & 10 \\ \cline{2-2} -10 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow 1+1 \rightarrow 2$ پس حداقل ۲ عضو از مجموعه گزینه ۴ وجود دارد.

بطوریکه در تقسیم بر عدد ۱۰ باقی‌مانده‌های یکسان دارند.

۳ـ حداقل تعداد افرادی که در یک گزارش آماری مورد سوال قرار می‌گیرد چند نفر باشند تا مطمئناً ۳ نفر از آنها در یک روز از هفته متولد شده باشند؟

حل) اگر افراد را بعنوان کبوتر و روزهای هفته را بعنوان لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری داریم؟

$\{(3-1)\times 7]+1=15$

پس حداقل ۱۵ نفر باید در این گزارش آماری مورد سوال قرار گیرند.

۴) ۶۵ کبوتر در حداکثر چند لانه کبوتر قرار بگیرند تا حداقل در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار داشته باشند.

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

حل) بیش از دو کبوتر = سه کبوتر

۶۵ کبوتر را به عددهای بزرگتر داده شده تقسیم می‌کنیم هر کدام که باقی‌مانده غیر صفر داشته باشد یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌کنیم اگر حاصل باشد جواب صحیح است.

$$\begin{array}{r|l} 65 & 32 \\ \hline -64 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \quad 2 \xrightarrow{+1} 3 \checkmark$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 33 \\ \hline -33 & 1 \\ \hline 32 & \end{array} \quad 1 \xrightarrow{+1} 2 \times$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 34 \\ \hline -34 & 1 \\ \hline 31 & \end{array} \quad 1 \xrightarrow{+1} 2 \times$$

روش دوم : $65=[(3-1)\times x]+1\Rightarrow 64=2x\Rightarrow x=32$

۵ـ مدرسه‌ای دارای n دانش‌آموز است. حداقل مقدار n چقدر است تا مطمئن شویم در آن مدرسه حداقل دو دانش‌آموز وجود دارند به طوری که هم حرف اول اسم و هم حرف اول نام خانوادگی آن دو یکسان باشد؟

حل) اگر دانش‌آموزان را بعنوان کبوتر و ۳۲×۳۲ را بعنوان تعداد لانه کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری داریم $[32^2\times(2-1)]+1=1025$ پس این مدرسه حداقل ۱۰۲۵ دانش‌آموز باید داشته باشد.

۶ـ برای آن که در یک کلاس به یقین حداقل ۵ نفر وجود داشته باشد که در یک ماه از سال متولد شده باشند حداقل چند نفر دانش‌آموز داریم؟

حل) اگر دانش‌آموزان کلاس را بعنوان کبوتر و ماههای سال را بعنوان لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه و کبوتری داریم؟ $[12\times(5-1)]+1=49$ پس حداقل این کلاس باید ۴۹ دانش‌آموز داشته باشد.

۷ـ در یک جعبه، ۴ مهره‌ی سیاه، ۳ مهره سفید، ۲ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی موجود است. حداقل چند مهره باید از جعبه خارج کنیم تا مسمئن شویم که حداقل سه نوع رنگ متمایز در مهره‌های انتخابی وجود دارد؟

حل) بدبینانه‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم مهره‌ها را از رنگی برمی‌داریم که بیشترین تعداد را دارد یعنی سیاه و [آبی یا سفید] در این صورت تعداد مهره ؟؟؟ انتخابی ۷ می‌شود با انتخاب یک مهره از رنگهای رنگ نتیجه می‌گیریم که حداقل ۳ نوع رنگ متمایز در مهره‌های انتخابی وجود دارد پس حداقل ۸ مهره باید از جعبه خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل سه نوع رنگ متمایز در مهره‌های انتخابی وجود دارد.

۸ـ اگر ۳۲ مهره را در n جعبه چنان پخش کنیم که در هر جعبه حداکثر ۵ مهره قرار گیرد آن‌گاه حداقل مقدار n را بیابید.

حل) اگر مهره‌ها را بعنوان کبوتر و جعبه‌ها را بعنوان لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه کبوتری داریم؟ $[(۵-۱)\times n]+r<۳۲, r\neq ۰$ ، $۴n<۳۲-r\Rightarrow n_{\min}=۷$ پس حداقل ۷ جعبه باید باشد.

۹ـ در یک کلاس حداقل چند دانش‌آموز باید حضور داشته باشند تا دست کم اسامی چهار نفر از آن‌ها با حرف اول یکسان آغاز شود؟

حل) اگر دانش‌آموزان را بعنوان کبوتر و حروف الفبای فارسی را بعنوان لانه‌ی کبوتر در نظر بگیریم طبق اصل لانه و کبوتر داریم؟ ۹۷=۱+[۳۲×(۱−۴)] پس در این کلاس باید حداقل ۹۷ دانش‌آموز حضور داشته باشند.

۱۰ـ حداقل چند عضو از مجموعه‌ی {۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۰,۱۲} انتخاب کنیم تا مطمئن شویم حداقل یک بر دیگری بخش‌پذیر است؟

حل) بدبینانه‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم. اعدادی از مجموعه داده شده را انتخاب می‌کنیم که بر هم بخش‌پذیر نباشند. یعنی {۲,۳,۵} با انتخاب ۱ عضو دیگر از مجموه داده شده نتیجه می‌شود حداقل ۴ عضو از مجموعه {۲,۳,۴,۵,۶,۸,۱۰,۱۲} انتخاب کنیم مطمئن می‌شویم که حداقل یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

مسائل:

۱- حداکثر تعداد اعدادی که از مجموعه‌ی {۱,۲,...,۲۵} می‌توان برداشت که جمع هیچ ۲ عضوی مضرب ۳ نشود، چندتاست؟

۲- اگر بتوان از هر مجموعه‌ی nعضوی از اعداد صحیح همواره ۶ عضو انتخاب کرد که جمع اعضای آن بر ۶ بخش‌پذیر باشد حداقلِ n چند است؟

۳- ثابت کنید در هر مهمانی دو نفر وجود دارد که تعداد آشنایان برابری دارند.

۴- در یک جدول ۴×۳ هفت نقطه انتخاب کرده‌ایم ثابت کنید فاصله‌ی دو تا از آن‌ها از $\sqrt{۵}$ بیش‌تر نیست؟ آیا برای شش نقطه هم درست است؟ پنج نقطه چطور؟

۵- ثابت کنید از هر ۵ نقطه روی شبکه اعداد صحیح حتماً ۲ نقطه وجود دارند که وسط آن‌ها نیز نقطه‌ای روی شبکه است.

۶- ۲۵ نقطه داریم. از هر سه تا دوتای آن‌ها فاصله‌شان حداکثر ۱ است. ثابت کنید ۱۳ تا از آن‌ها را می‌توان در دایره‌ای به شعاع ۱ قرار داد.

۷- ۲۰ عدد طبیعی و متمایز کوچک‌تر از ۷۰ داریم. ثابت کنید در بین تفاضل دوبه‌دوی آن‌ها حداقل ۳ عدد برابر یافت می‌شود.

۸- ثابت کنید در هر $2n$ ضلعی قطری وجود دارد که موازی هیچ ضلعی نیست.

۹- تعدادی پاره‌خط داریم. طول هر کدام حداقل ۱ و حداکثر ۵۵ است. ثابت کنید ۳تای آن‌ها وجود دارند که می‌توان با آن‌ها یک مثلث ساخت!

۱۰- ثابت کنید اگر عددی مضرب ۲ و ۵ نباشد توانی دارد که نمایش دهدهی آن سمت راستش به فرم $1\underbrace{0\ldots000}_{n\text{ تا}}$ است.

۱۱- سوال ۷ داخل جلسه را برای ۵۱ مورچه هم حل کنید!