پیش‌آزمون مقدماتی

اصول شمارش، تبدیل، جایگشت و ترکیب

کاربردهای اصل‌ضرب و اصل جمع

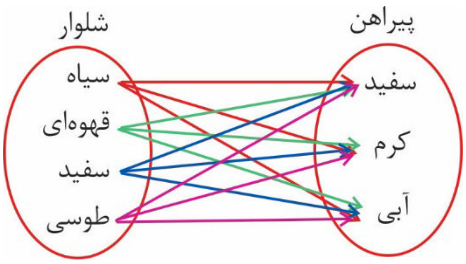
فرض کنید که بتوانیم کاری ار به m روش مختلف انجام دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که کار دیگری را که مستقل از کار اول است (به عبارت دیگر کار اول هیچ دخالت یا تأثیری در کار دوم ندارد) بتوانیم به n روش گوناگون انجام دهیم. اکنون سؤال این است که اگر بخواهیم هر دو کار را با هم انجام دهیم، به چند روش مختلف می‌توان عمل کرد؟

پاسخ چنین پرسشی را باید در اصل ضرب جستجو کرد. اصل ضرب به ما می‌گوید که جواب مسئله برابر با mn است.

برای روشن‌تر شدن این مطلب مثال می‌زنیم.

فرض کنید که پویا سه پیراهن به رنگ‌های سفید، کرم و آبی و چهار شلوار به رنگ‌های سیاه، قهوه‌ای، سفید و طوسی دارد. می‌خواهیم بدانیم که به چند روش مختلف او می‌تواند یک پیراهن را با یک شلوار بپوشد؟

برای پیدا کردن پاسخ این پرسش به شکل زیر توجه کنید:



همان‌طور که از شکل دیده می‌شود، پویا می‌تواند شلوار سیاه را با هر یک از پیراهن‌های سفید، کرم یا آبی بپوشد. برای سایر شلوارها نیز وضعیت به همین ترتیب است. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر شلوار سه حالت وجود دارد و چون چهار شلوار با رنگ‌های مختلف وجود دارد، پس پاسخ مسئله برابر با $۱۲ = ۳ \times ۴$ می‌باشد.

اما در مورد اصل جمع چه می‌توان گفت؟

فرض کنید کاری را بتوانیم به m روش مختلف انجام دهیم و کار دیگری را که هیچ ارتباطی با کار اول ندارد، به n روش گوناگون به انجام رسانیم. سؤال این است:

به چند روش مختلف می‌توان حداقل کار اول یا کار دوم را انجام داد؟

جواب به این سؤال نیز بسیار آسان است: $m+n$

همان طور که در اینجا می‌بیند، برای پیدا کردن جواب، تعداد حالت‌های دو کار مختلف را باهم جمع کرده و در حقیقت از اصل جمع بهره‌برده‌ایم.

اکنون با توجه به آنچه که در مورد اصل‌ضرب و اصل جمع گفته شد، می‌توان چنین گفت که اگر انجام چند عمل مستقل از یکدیگر را که برای هر کدام از آن‌ها تعداد روش‌های مختلفی وجود دارد، خواسته باشیم، از اصل ضرب و در صورتی که بخواهیم حداقل تعداد روش‌های انجام یکی از آن‌ها را به‌دست آوریم از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

اکنون به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال۱: فرض کنید از روستای A به روستای B سه راه و از روستای B به روستای C پنج راه وجود داشته باشد. هیچ مسیر مستقیم هم از A به C وجود ندارد.

الف) به چند روش می‌توان از روستای A به روستای C رفت؟

ب) به چند روش می‌توان از روستای A به روستای C رفت و برگشت؟

پ) به چند روشن می‌توان از روستای C به روستای A رفت، به شرط آن که از راهی که آمده‌ایم، برنگردیم؟

حل:

الف) $۱۵ = ۵ \times ۳$

ب) $۲۲۵ = (۳ \times ۵) \times (۵ \times ۳)$

پ) $۱۲۰ = (۲ \times ۴) \times (۵ \times ۳)$

مثال۲: به کمک اصل ضرب ثابت کنید که تعداد شمارنده‌های طبیعی عدد $2^x \times 3^y \times 5^z$ برابر است با:

$$(x+1)(y+1)(z+1)$$

حل: عدد $2^x \times 3^y \times 5^z$ بر هر یک از اعداد $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^x$ و $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^y$ و $5^0, 5^1, 5^2, \dots, 5^z$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{ccc} 2^0 & 3^0 & 5^0 \\ 2^1 & 3^1 & 5^1 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^x & 3^y & 5^z \end{array}$$

چنانچه مسئله‌ی پیراهن‌ها و شلوارهای پویا را که در ابتدای این درس به آن اشاره شد، به خاطر بیاورید، پیدا کردن تعداد شمارنده‌های عدد $2^x \times 3^y \times 5^z$ ساده خواهد بود. اگر به مسئله‌ی پیراهن‌ها و شلوارها، جوراب‌هایی به رنگ‌های مختلف را اضافه کنیم، مسئله‌ی به‌دست آمده دقیقاً با مسئله‌ی پیدا کدرن تعداد شماره‌رنده‌ها (مقسوم‌علیه‌های طبیعی)، عدد $2^x \times 3^y \times 5^z$ یکسان خواهد بود.

هر یک از شمارنده های عدد $2^x \times 3^y \times 5^z$ به صورت $2^k \times 3^m \times 5^n$ خواهد بود.

مقادیر یا حلالت‌های ممکن برای k عبارتند از $x, \dots, 2, 1$ و 0 که مجموعاً $x+1$ حالت می‌شود.

مقادیر یا حالت‌های ممکن برای m عبارتند از $y, \dots, 2, 1$ و 0 که در مجموع $y+1$ حالت می‌شود.

مقادیر یا حالت‌های ممکن برای n عبارتند از $z, \dots, 2, 1$ و 0 که برابر با $z+1$ حالت می‌شود.

در نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد $2^x \times 3^y \times 5^z$ عبارت است از $(x+1)(y+1)(z+1)$.

دقت داشته باشید که نتیجه برای عدد $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_k^{a_k}$ که در آن $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ اعداد اول متمایز هستند. برقرار است.

مثال۳: عدد $۱۰^{۷} \times ۴^{۳} \times ۲^{۸}$ دارای چند شمارنده‌ی طبیعی است؟

حل: ابتدا باید تجزیه شده‌ی استاندارد عدد داده شده را بنویسیم.

$$۲^{۸} \times ۴^{۳} \times ۱۰^{۷} = ۲^{۸}(۲^{۲})^{۳} \times (۲ \times ۵)^{۷} = ۲^{۸} \times ۲^{۶} \times ۲^{۷} \times ۵^{۷} = ۲^{۲۱} \times ۵^{۷}$$

اکنون می‌توان تعداد شمارنده‌ها را پیدا کرد. پاسخ عبارت است از:

$$(۲۱+۱) \times (۷+۱) = ۲۲ \times ۸ = ۱۷۶$$

تذکر: همواره برای حل چنین مسائلی باید تجزیه شده استاندارد عدد را به صورت حاصل‌ضرب عوامل متمایز اول (به صورت توان‌دار) بنویسید.

مثال۴: چند تا از مقسوم‌علیه‌های عدد $۵^{۶} \times ۹^{۱۰} \times ۲^{۹}$ مربع کامل هستند؟

حل: ابتدا عدد را به صورت تجزیه شده‌ای استاندارد در می‌آوریم:

$$۲^{۹} \times ۹^{۱۰} \times ۵^{۶} = ۲^{۹} \times ۳^{۲۰} \times ۵^{۶}$$

دقت داشته باشید که آن دسته از مقسوم‌علیه‌های این عدد که مربع کامل هستند، باید به صورت $۲^{x} \times ۳^{y} \times ۵^{z}$ باشند که در آن:

$x = ۰,۲,۴,۶,۸ \rightarrow$ ۵ حالت

$y = ۰,۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰ \rightarrow$ ۱۱ حالت

$z = ۰,۲,۴,۶ \rightarrow$ ۴ حالت

پاسخ $= ۵ \times ۱۱ \times ۴ = ۲۲۰$

مثال ۵: دو عدد $۵^{۱۰} \times ۳^{۸}$ و $۳^{۱۱} \times ۵^{۱۶} \times ۲^{۳}$ چند شمارنده ی مشترک دارند؟

حل: ابتدا ب‌م‌م این دو عدد را به‌دست می‌آوریم که برابر با $۵^{۱۰} \times ۳^{۷}$ می‌شود. پاسخ مسئله تعداد شمارنده‌های (مقسوم‌علیه‌های) ب‌م‌م دو عدد است.

پاسخ $= (۷+۱) \times (۱۰+۱) = ۸ \times ۱۱ = ۸۸$

ترکیبیات – اصل ضرب(۲)

مثال۱: با ارقام ۲، ۳، ۵ ، ۸ و ۹، (الف) چند عدد سه رقمی، (ب)چند عدد چهار رقمی و (پ) چند عدد پنج رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت؟

حل: اعداد سه رقمی مورد نظر به صورت $\square\ \square\ \square$ نشان می‌دهیم.

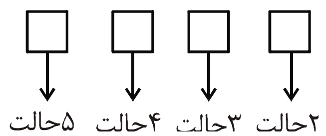
الف) چون هیچ محدویتی غیر از تکراری نبودن رقم‌ها نداریم، جاهای خالی را از چپ به راست پر می‌کنیم. واضح است که برای صدگان ۵ انتخاب، برای دهگان ۴ انتخاب و برای یکان نیز سه انتخاب داریم. در نتیجه بنابر اصل ضرب پاسخ مسئله برابر با $۵\times۴\times۳=۶۰$ می‌باشد.

ب) پاسخ : $\square\ \square\ \square\ \square$ $۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$

پ) پاسخ: $\square\ \square\ \square\ \square\ \square$ $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

مثال۲: با رقم‌های ۴، ۲ ، ۳، ۵ ، ۹ و ۷ ، (الف) چند عدد چهار رقمی زوج و بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ (ب) در صورتی که تکرار رقم‌ها مجاز باشد، جواب مسئله را به‌دست آورید.

حل: الف) برای حالتی که تکرار رقم‌ها مجاز نباشد، داریم:



دقت داشته باشید که برای پیدا کردن جواب در این حالت ابتدا شرط مسئله را اعمال می‌کنیم. یعنی شمارش را از رقم یکان آغاز می‌کنیم. به‌دلیل این که گفته شده است که اعداد باید زوج باشند، پس رقم یکان با توجه به ارقام داده شده باید ۲ یا ۴ باشد و این بدان معنی است که رقم یکان می‌تواند دارای دو حالت باشد. اکنون که شرط مسئله اعمال شده است، شمارش را از اولین رقم سمت چپ، از سر می‌گیریم.

واضح است که در این‌جا ۵ انتخاب وجود دارد. زیرا قبلاً یکی از رقم‌های ۲ یا ۴ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به همین ترتیب برای رقم صدگان ۴ حالت و برای رقم دهگان نیز سه حالت خواهیم داشت. در نتیجه جواب مسئله عبارت است از:

$$۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$$

ب) برای حالتی که تکرار رقم‌ها مجاز باشد، باز هم ابتدا شرط مسئله را اعمال می‌کنیم. به این معنی که باید رقم یکان اعداد چهار رقمی مورد نظر زوج باشد.

پس دو حالت برای رقم یکان وجود دارد. ادامه‌ی شمارش از رقم یکان هزار شروع می‌شود. با توجه به این که تکرار رقم‌ها مجاز است، پس برای هر یک از رقم‌های یکان هزار، صدگان و دهگان ۶ حالت وجود دارد. در نتیجه جواب مسئله برابر است با:

$$۶\times۶\times۶\times۲=۴۳۲$$

مثال۳: با رقم های ۰ ، ۲، ۳، ۵ ، ۶ و ۱ چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟ مسئله را در هر دو حالتی حل کنید که تکرار ارقام مجاز و غیرمجاز باشد.

حل: الف) تکرار ارقام مجاز باشد.

در این حالت باید اعداد را به دو دسته تقسیم کنیم. اعدادی که رقم یکان آن‌ها صفر است و اعدادی که رقم یکان آن‌ها ۲ یا ۶ است.

اگر رقم یکان صفر باشد، در این صورت برای هر یک از ارقام صدگان و دهگان ۵ حالت وجود دارد. در نتیجه تعداد این اعداد $۵\times۵\times۱=۲۵$ است.

در صورتی که رقم یکان ۲ یا ۶ باشد، برای تعداد اعداد خواهیم داشت:

$$۵\times۶\times۲=۶۰$$

با توجه به اصل جمع پاسخ نهایی برابر است با: $۳۰+۶۰=۹۰$

ب) برای حالتی که تکرار ارقام مجاز نباشد، داریم:

تعداد اعداد سه رقمی با یکان صفر $\leftarrow ۵\times۴\times۱=۲۰$

تعداد اعداد سه رقمی با یکان ۲ یا ۶ $\leftarrow ۴\times۴\times۲=۳۲$

پاسخ نهایی $=۲۰+۳۲=۵۲$

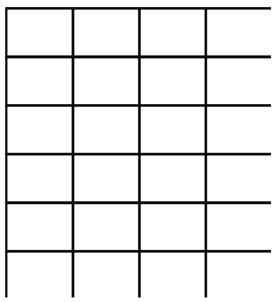
مثال۴: به چند روش می‌توان یک مهره‌ی رخ سفید و یک مهره‌ی رخ سیاه را در دو خانه از صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸قرار داد، به طوری که یکدیگر را تهدید نکنند؟

حل: می‌دانیم که حرکت رخ در صفحه‌ی شطرنج به صورت افقی یا عمودی است.

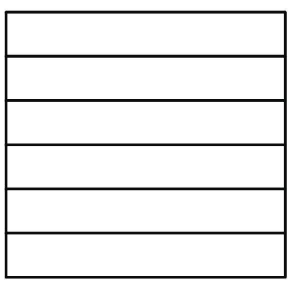
آگاه هستیم که صفحه‌ی شطرنج ۸×۸از ۶۴ مربع تشکیل شده است. بنابراین برای قرار دادن رخ اول دارای ۶۴ انتخاب هستیم و با خیال آسوده می‌توانیم این رخ را در هر کجا از صفحه‌ی شطرنج قرار دهیم.

برای قرار دادن رخ دوم در صفحه‌ی شطرنج باید کمی احتیاط به خرج دهیم. زیرا بر خلاف رخ اول دیگر نمی‌توانیم آن را در هر جایی قرار دهیم اگر صفحه شطرنج ۸×۸را در نظر بگیریم که قبلاً یک رخ در یکی از خانه‌های آن قرار گرفته است، این رخ می‌تواند غیر از خانه‌ای که خودش در آن قرار گرفته است، هفت خانه را در ردیف افقی و هفت خانه را در ردیف عمودی تهدید کند. بنابراین از ۶۳ خانه‌ی خالی صفحه‌ی شطرنج فقط ۴۹ = ۱۴ − ۶۳خانه توسط مهره‌ی رخ اول تهدید نمی‌شوند. در نتیجه پاسخ مسئله عبارت است از: ۳۱۳۶ = ۴۹×۶۴

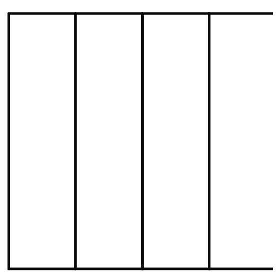
مثال۵: در شکل زیر چند مستطیل دیده می‌شود؟ مربع هم نوعی مستطیل است.



حل: می‌توان چنین در نظر گرفت که این شکل از ترکیب دو شکل زیر به وجود آمده است؟



A



B

شکل Aاز ۲۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶و شکل Bاز ۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴مستطیل تشکیل شده‌اند. در نتیجه شکل اصلی از ۲۱۰ = ۱۰×۲۱مستطیل ساخته شده است.

مثال۶: یک آزمون تستی دارای ۲۰ سؤال ۴ گزینه‌ای است.

اگر هر سؤال فقط یک پاسخ (گزینه) درست داشته باشد، به چند روش می‌توان به این ۲۰ سؤال پاسخ داد، به شرطی که:

الف) حتماً به همه‌ی سؤال‌ها پاسخ دهیم؟

ب) بتوانیم به برخی از سؤال‌ها پاسخ ندهیم؟

حل: الف) $۴^{۲۰}$ ب) $۵^{۲۰}$

مثال۷: در چند کلمه‌ی ۱۰ حرفی با حروف a, b, c, d, e, f, g حروف مجاور متمایزند؟

حل: با توجه به این که نوشتن در زبان انگلیسی از چپ به راست است، برای اولین حرف از سمت چپ ۷ انتخاب وجود دارد، اما برای انتخاب دومین حرف باید کمی دقیق بود. دومین حرف نباید با نخستین حرف یکی باشد. در این حالت برای دومین حرف ۶ انتخاب وجود دارد.

در مورد سومین حرف چه می‌توان گفت؟ آن چیزی که باتوجه به شرط مسئله مسلم ا ست، این است که سومین حرف نباید با دومین حرف یکسان باشد؛ اما می‌تواند با نخستین حرف یکی باشد. در نتیجه برای سومین حرف نیز ۶ انتخاب وجود دارد و این روند تا آخرین حرف ادامه پیدا می‌کند. بنابراین جواب نهایی برابر است با: ۷×۶^{۹}

مثال۸: در صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ چند مستطیل با مساحت ۱۶ وجود دارند؟

حل: مستطیل‌های با مساحت ۱۶ از سه نوع هستند؟ ۸×۲، ۲×۸ و ۴×۴ (دقت داشته باشید که مربع هم نوعی مستطیل است.) تعداد این مستطیل‌ها در صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ برابر است با ۱×۷، ۵×۵ و ۷×۱ که در مجموع عبارتی است از :

$$۱\times۷+۵\times۵+۷\times۱=۳۹$$

مثال۹: به چند طریق می‌توان یک مهره‌ی سفید و یک مهره‌ی سیاه را در دو خانه از صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸ قرارداد، به طوری که در یک سطر یا یک ستون باشند؟

حل: مهره‌ی اول را به ۶۴ روش می‌توان در یکی از خانه‌های صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸قرار داد. مهره‌ی دوم باید در یکی از ۱۴ خانه‌ی موجود در ردیف یا ستون مربوط به مهره‌ی اول قرار بگیرد. در نتیجه جواب عبارت است از:

$$۶۴\times۱۴=۸۹۶$$

مثال۱۰: به چند روش می‌توان یک مهره‌ی سفید و یک مهره‌ی سیاه را در دو خانه‌ی مجاور از صفحه‌ی شطرنجی ۸×۸قرار داد؟ دو خانه را در صورتی مجاور گویی که حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.

حل: بسته به این مهره‌ی سفید در یکی از گوشه‌ها، در یکی از خانه‌های حاشیه‌ی صفحه شطرنجی غیر از گوشه‌ها یا در یکی از خانه‌های غیر حاشیه‌ای قرار گیرد، برای مهره‌ی سیاه به ترتیب ۳، ۵ و ۸ انتخاب وجود دارد. با توجه به این که ۴ گوشه، ۲۴ خانه‌ی حاشیه‌ای غیر از گوشه‌ها و ۳۶ خانه‌ی غیر حاشیه‌ای وجود دارد، می‌توان گفت که پاسخ عبارت است از:

$$۴\times۳+۲۴\times۵+۳۶\times۸=۱۲+۱۲۰+۲۸۸=۴۲۰$$

جایگشت خطی بدون تکرار

اگر بخواهیم تعریف بسیار ساده‌ای از جایگشت خطی داشته باشیم، باید بگوییم که به هر روش قرار گرفتن چند شیئی پشت سرهم در یک ردیف یا یک خط جایگشت خطی گفته می‌شود. جایگشت معادل واژه "Permutation" در زبان انگلیسی است.

از آنجا که در مسایل جایگشت با نماد ! که به نماد فاکتوریل معروف است، زیاد روبه‌رو می‌شویم، بهتر است که در ابتدا به بررسی ویژگی‌ها و تمرین با این عملگر بپردازیم.

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. در این صورت بنابر تعریف $n!$ عبارت است از حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n.

$$n!=۱\times۲\times۳\times...\times n$$

درضمن تعریف می‌کنیم که $۰!=۱$.

با استفاده از تعریف $n!$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$n!=n(n-۱)!=n(n-۱)(n-۲)!$$

مثال۱: نشان دهید $۲۰! = ۱۹(۱۹!+۱۸!)$.

حل:

$$۱۹(۱۹!+۱۸!) = ۱۹\times(۱۹\times۱۸!+۱۸!) = ۱۹\times۱۸!\times(۱۹+۱) = ۱۹\times۱۸!\times۲۰ = ۲۰\times۱۹\times۱۸! = ۲۰!$$

مثال۲: عبارت زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$۸\times۹\times۱۰\times\ldots\times۲۴$$

حل:

$$۸\times۹\times۱۰\times\ldots\times۲۴ = \frac{۱\times۲\times۳\times\ldots\times۲۴}{۱\times۲\times۳\times\ldots\times۷} = \frac{۲۴!}{۷!}$$

مثال۳: به ازای هر عدد طبیعی k ثابت کنید:

$$(k+۱)!-k! = k\times k!$$

حل:

$$(k+۱)!-k! = (k+۱)k!-k! = k!(k+۱-۱) = k\times k!$$

مثال۴: به ازای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$۱\times۱!+۲\times۲!+\ldots+n\times n! = (n+۱)!-۱$$

حل:

$$\begin{aligned}&۱\times۱!+۲\times۲!+\ldots+n\times n! =\\&۱!+(۳-۱)\times۲!+(۴-۱)\times۳!+(۵-۱)\times۴!+\ldots+\\&(n+۱-۱)\times n! = ۱+۳\times۲!-۲!+۴\times۳!-۳!+۵\times۴!-۴!+\\&\ldots\ldots+(n+۱)n!-n! = (n+۱)!-۱\end{aligned}$$

اکنون به ادامه مبحث جایگشت خطی می‌پردازیم.

حروف a، b، c و d را در نظر بگیرید. می‌توانیم این حروف را به صورت‌های زیر در یک ردیف کنار یکدیگر بنویسیم:

abcd, abdc, bacd, badc, cdab, dcab, cdba,
dcba, acbd, acdb, adcb, bcad, bdac, bcda,
bdca, cabd, dabc, cdab, dcab, dcba, cdba, cadb, dacb

به هریک از کلمات چهارحرفی بالا(که لازم نیست حتما با معنی باشند) یک جایگشت خطی کامل و بدون تکرار از حروف a، b، c و d گفته می‌شود. علت نامیدن جایگشت کامل این است که از هر چهار حرف a، b، c و d در ساختن کلمه‌های چهارحرفی بدون حرف تکراری استفاده شده است.

همانطورکه ملاحظه می‌کنید، تعداد جایگشت‌های کامل حروف a، b، c و d برابر است با ۲۴. اکنون سوال اینجاست که آیا می‌توانستیم بدون نوشتن همه‌ی این ۲۴ حالت، تعداد جایگشت‌ها را به طور ساده‌تری حساب کنیم؟

پاسخ به این پرسش مثبت است. برای انجام این کار از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. اگر مربع‌های زیر نشان‌دهنده جایگاه‌های چهار حرف a، b، c و d باشند،برای مربع اول، ۴ انتخاب، برای مربع دوم، ۳ انتخاب، برای مربع سوم، ۲ انتخاب و در نهایت برای مربع چهارم، یک انتخاب وجود خواهد داشت.

$\square\square\square\square$

در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها عبارت است از

$$۴\times ۳\times ۲\times ۱=۲۴$$

و با نمادگذاری فاکتوریل خواهیم داشت:

$$۴!=۲۴$$

باتوجه به مثالی که در مورد جایگشت خطی کامل ذکر شد و با به کاربردن اصل ضرب می‌توان این‌طور نتیجه‌گیری کرد که اگر n شیئی متمایز داشته باشیم، تعداد جایگشت‌های خطی کامل آن‌ها برابر است با:

$$n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\ldots\times ۱=n!$$

اکنون به مثال‌های حل شده‌ی زیر در مبحث جایگشت خطی کامل توجه کنید:

مثال۱: چند عدد ۵ رقمی بدون رقم‌های تکراری با ارقام ۶، ۸، ۹، ۷ و ۴ می‌توان نوشت؟

حل: $۵!=۱۲۰$

مثال ۲: چند جایگشت از حروف کلمه‌ی table با حرف t شروع می‌شوند؟

حل: چون پنج حرف داریم (حروف t, a, b, l, e)،

$\boxed{t}\ \square\ \square\ \square\ \square$

پس باید تعداد کل جایگشت‌های پنج حرفی را با این شرط که نخستین حرف t باشد، پیدا کنیم. با توجه به مربع‌های رسم شده در بالا می‌بینیم که چهار حرف a, b, l, e و چهار مربع خالی داریم. پس باید کل تعداد جایگشت‌های چهارحرفی را پیدا کنیم که برابر با $۴!=۲۴$ می‌شود.

مثال۳: چند جایگشت از حروف کلمه‌ی computer به حرف صدادار ختم می‌شوند؟

حل: حروفی که در اختیار داریم، عبارتند از c, o, m, p, u, t, e, r. حروف صدا دار در اینجا عبارتند از o, e (دقت داشته باشید که u در صورتی صدادار محسوب می‌شود که صدایی غیر از «ی» مثلا «آ» یا «ای» بدهد.) حروف بی‌صدا نیز عبارتند از c, m, p, u, t, r.

□□□□□□□□

همانگونه که قبلا هم در مورد مسایل مربوط به شمارش صحبت کرده‌ایم، ابتدا شرط خاص‌تر مسئله را اعمال می‌کنیم. در این مسئله شرط خاص مسئله این است که جایگشت‌های مورد نظر، باید به حروف صدادار ختم شوند. چون اینجا دو حرف صدادار داریم، پس برای آخرین حرف در مربع‌های رسم شده (از سمت چپ) ۲ حالت وجود دارد. حال هفت جای خالی باقی می‌ماند و هفت حرف. تعداد جایگشت‌های هفت‌تایی عبارت است از!۷. در نتیجه پاسخ این مسئله عبارت است از $!۷\times۲$.

مثال۳: چهار معلم و سه دانش‌آموز به چند روش می‌توانند در یک صف بایستند. به طوری که هیچ دو معلمی کنار یکدیگر نباشند؟

حل: دانش‌آموزان را با □ و معلم‌ها را با △ نشان می‌هیم. چون تعداد دانش‌آموزان از تعداد معلم‌ها کمتر است و قرار است که معلم‌ها در کنار یکدیگر قرار نگیرند، تنها حالت ممکن این است که در ابتدا و انتهای صف معلم‌ها قرار بگیرند و سپس معلم‌ها به صورت یک در میان در صف بایستند.(به شکل زیر توجه کنید)

△□△□△□△

اکنون مسئله را می‌توان به دو مسئله جدا از هم جایگشت‌ها تبدیل کرد که با هم ترکیب شده‌اند و بنا به اصل ضرب بایستی جواب آن‌ها در هم ضرب شود. تعداد جایگشت‌ها برای مربع‌ها برابر با !۳و برای مثلث‌ها برابر !۴ است. در نتیجه جواب مسئله عبارت است از:

$$۳!\times۴!$$

جایگشت‌های خطی r از n

فرض کنیم n شیء متمایز داشته باشیم. حال اگر بخواهیم تعداد جایگشت‌های r تایی از این n شیء متمایز را به دست بیاوریم، خواهیم داشت:

$$n\times(n-۱)\times(n-۲)\times...\times(n-r+۱)$$

که در آن $۰\le r\le n$ است.

با استفاده از خاصیت فاکتوریل می‌توانیم بنویسیم:

$$n\times(n-۱)\times(n-۲)\times...\times(n-r+۱)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

جایگشت خطی r از n را با علامت $p(n,r)$ یا P_r^n نشان می‌دهند.

به عنوان مثال، اگر بخواهیم جایگشت‌های سه‌تایی از حروف a، b، c و d را بنویسیم، داریم:

abc, abd, acb, adb
bac, bad, bca, bda
cda, cbd, dca, dcb
acd, bdc, dbc, cad
cba, cab, acd, adc
dac, dba, cdb, dab

همانطور که با یک شمارش ساده می‌توان فهمید تعداد این جایگشت‌ها ۲۴ می‌باشد. به عبارت دیگر با استفاده از فرمولی که برای به دست آوردن تعداد جایگشت‌های r از n به دست آوردیم، می‌توان نوشت:

$$p(۴,۳)=\frac{۴!}{(۴-۳)!}=\frac{۴!}{۱!}=۲۴$$

اکنون به مثال‌های دیگری توجه کنید:

مثال ۱: با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟

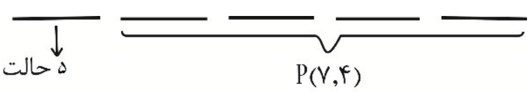
حل:

$n=۶$ تعداد رقم‌ها
$r=۳$

$$p(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=۶\times۵\times۴=۱۲۰$$

مثال ۲: چند جایگشت پنج حرفی از حروف کلمه‌ی triangle می‌توان پیدا کرد که با حروف بی‌صدا شروع می‌شوند؟

حل: شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



همانطور که دیده می‌شود، برای نخستین حرف ۵ حالت و برای سایر جاهای خالی $P(7,4)$ حالت وجود دارد. در نتیجه جواب مسئله عبارت است از $5\times P(7,4)$

مثال۳: در چند جایگشت چهار رقمی از ارقام ۱تا ۹ آخرین رقم زوج است؟

حل: برای آخرین رقم ۴ حالت وجود دارد. سه جای خالی باقی‌مانده را می‌توان به $P(8,3)$روش پر کرد. بنابراین جواب این مساله برابر است با $4\times P(8,3)$

مثال ۴: در چند جایگشت چهار حرفی از حروف کلمه‌ی profile حرف f وجود دارد؟

حل ۱: تعداد کل جایگشت‌های ۴ حرفی برابر $P(7,4)$ و تعداد جایگشت‌های ۴ حرفی که فاقد حرف f هستند، برابر $P(6,4)$ است. بنابراین جواب مسئله عبارت است از $P(7,4)-P(6,4)$

حل ۲: چهار مکان در یک ردیف در نظر بگیرید. در یکی ازاین مکان‌ها باید حرف f را قرار دهیم. برای سه حرف باقی‌مانده‌ی جایگشت نیز $P(6,3)$ انتخاب وجود دارد. در نتیجه پاسخ برابر $4\times P(6,3)$ است.

اکنون نشان می‌دهیم که جواب $P(7,4)-P(6,4)$ با جواب $4\times P(6,3)$ برابر است.

$$P(7,4)-P(6,4)=\frac{7!}{3!}-\frac{6!}{2!}=\frac{7\times 6!}{3\times 2!}-\frac{6!}{2!}=\frac{6!}{2!}(\frac{7}{3}-1)=$$
$$\frac{6!}{2!}\times\frac{4}{3}=\frac{4\times 6!}{3\times 2!}=4\times\frac{6!}{3!}=4\times P(6,3)$$

مثال ۵: در چند عدد شش رقمی با رقم‌های متمایز، رقم‌های اول، دوم و سوم (از سمت چپ) فرد هستند؟

حل: سه رقم اول جایگشتی از ارقام ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ است. بنابراین $P(5,3)$ انتخاب وجود دارد. سه رقم باقی‌مانده نیز جایگشتی سه رقمی از هفت رقم باقی‌مانده یعنی $P(7,3)$ است. بنابراین جواب مسئله عبارت است از $P(5,3)\times P(7,3)$

مثال ۶: ۱۰ صندلی در یک ردیف چیده شده‌اند. هفت دانش‌آموز می‌خواهند روی هفت صندلی بنشینند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است در صورتی‌که هیچ دوصندلی خالی مجاور هم نباشند؟

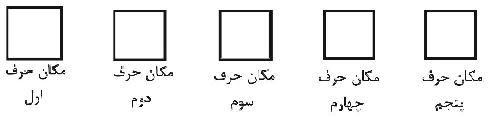
حل: به دلیل این‌که در پایان باید تمام دانش‌آموزان نشسته باشند، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

ابتدا به هر دانش‌آموز یک صندلی فرضی می‌دهیم. حال این ۷ دانش‌آموز را به $7!$ روش می‌توان در یک صف قرار داد، به‌طوری‌که هرکدام روی صندلی خودشان بنشینند. حال باید سه صندلی باقی‌مانده‌ی خالی را در میان دانش‌آموزان و ابتدا و انتهای صف آن‌ها قرار داد که این کار هم به $P(8,3)$روش ممکن است. بنابراین طبق اصل ضرب پاسخ مسئله عبارت است از

$7!\times P(8,3)$

مثال ۷: چند کلمه‌ی پنج حرفی از حروف $J, I, H, G, F, E, D, C, B, A$ می‌توان ساخت که از حروف F, E, D, C, B, A فقط بتوان به عنوان اولین، سومین، و پنجمین حرف استفاده کرد و از بقیه حروف در بقیه مکان‌ها؟

حل: مطابق شکل زیر پنج مکان برای پنج حرف کلمه‌ها در نظر بگیرید:



فرض کنید $X = \{A, B, C, D, E, F\}$ و $Y = \{G, H, I, J\}$ طبق فرض مسئله در مکان‌های اول، سوم و پنجم حروف از مجموعه‌ی X انتخاب می‌شوند و در مکان‌های دوم و چهارم از مجموعه‌ی Y.

در نتیجه پاسخ مسئله عبارت است از:

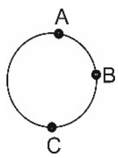
$$P(۶,۳) \times P(۴,۲) = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۳ = ۱۴۴۰$$

موضوع: جایگشت دوری

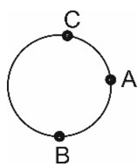
گاهی اوقات با مسائلی روبرو می‌شویم که بناست تعداد جایگشت‌های تعدادی شیء را در تعدادی مکان به دست آوریم، ولی بعضی حالت‌ها با یکدیگر معادل بوده و یک حالت محسوب می‌شوند.

فرض کنید n نفر می‌خواهند دور یک میز دایره‌ای شکل بنشینند. می‌خواهیم تعداد کل حالت‌های نشستن این افراد را دور میز به دست آوریم که با دوران حول میز این حالت‌ها به یکدیگر تبدیل نشوند. یعنی حالاتی که با دوران به یکدیگر تبدیل می‌شوند معادل هستند و آن‌ها را باید یک بار حساب کنیم.

برای روشن شدن موضوع فرض کنید $n = ۳$ و افراد C, B, A می‌خواهند دور میز بنشینند. این سه نفر می‌توانند به این صورت دور میز قرار بگیرند:

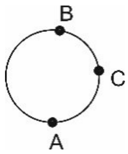


در مورد حالت زیر چه می‌توان گفت؟

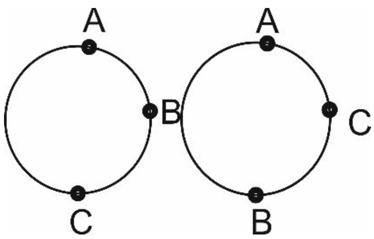


مشخص است که با یک دوران ساده به وضعیت قبلی خواهیم رسید. پس این دوحالت در واقع یک حالت به حساب می‌آیند.

حال سوال این جاست که آیا بازهم حالتی وجود دارد که با حالت‌های قبلی معادل باشد؟ پاسخ به این پرسش مثبت است. حالت زیر چنین ویژگی را دارد.



در یک نتیجه‌گیری کلی می‌توان گفت که جواب این مسئله برابر است با



سایر حالت‌ها، حالت‌هایی هستند که با دوران به یکی از دوحالت بالایی تبدیل می‌شوند. پس جواب مسئله به ازای $n = ۳$ مساوی ۲ می‌باشد.

چنانچه مسئله را با n نفر در نظر بگیریم، برای نخستین نفر یک حالت وجود دارد. ممکن است برای شما این سوال پیش بیاید که با وجود n جای خالی چرا برای نفر اول یک حالت در نظر گرفته می‌شود؟ برای پاسخ به این پرسش باید کمی محتاط بود و دقت به خرج داد. زیرا اگرچه n جای خالی برای نفر اول دور میز دایره‌ای شکل وجود دارد، اما با یک دوران آن‌ها معادل یکدیگرند. اما برای نفرهای بعدی چه می‌توان گفت؟ چون نفر اول می‌نشیند تقارن موجود در مسئله از این مرحله به بعد از بین می‌رود. زیرا دیگر حتی با اعمال دوران، جاهای خالی معادل یکدیگر نیستند. بنابراین از نفر دوم و بعد از او مسئله مانند جایگشت طی خواهد شد. پس می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ مسئله برای n نفر عبارت است از $(n-۱)!$

اکنون فرض کنید که n شیء در اختیار داریم و می‌خواهیم r تا ازآن‌ها را ($۰ \leq r \leq n$) دور یک دایره قرار دهیم. در صورتی که دوران حالت جدیدی را ایجاد کند به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

تعداد چنین چینش‌هایی را جایگشت دوری r شیء از n شیء می‌نامیم و آن را با Q_r^n یا $Q(n,r)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به آنچه که در بالا گفته شد، می‌توانیم بنویسیم: $Q_n^n = (n-۱)!$. اگر بخواهیم فرمول صریحی برای Q_r^n به دست آوریم مطابق استدلال قبل، اگر دوران‌ها حالت‌های جدید ایجاد می‌کردند، تعداد کل چینش‌ها برابر با $P(n,r)$ می‌شد. اما در هروضعیتی که r شیء دور دایره قرار گیرند چون می‌توان آن‌ها را r بار دوران داد، پس هر حالت در $P(n,r)$، r بار شمرده شده است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q_r^n = Q(n,r) = \frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r \times (n-r)!}$$

مثال ۱: می‌خواهیم جدول ۳×۳زیر را بارنگ‌های شماره‌های ۱تا۹ رنگ کنیم. در صورتی‌که دوران جدول مجاز باشد (دوران‌ها ۹۰ درجه هستند) و حالت‌های جدیدی محسوب نشوند، به چندطریق می‌توان این کار را انجام داد؟

حل: بنابر شرط مسئله جدول

۱	۲	۵
۸	۷	۴
۹	۳	۶

با جدول

۵	۴	۶
۲	۷	۳
۱	۸	۹

معادل است و یکی به حساب می‌آیند. بازهم مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم. اگر با دوران حالت جدیدی بدست می‌آمد به !۹ روش می‌توانستیم رنگ‌آمیزی را انجام دهیم. اما ما هر حالت را ۴ بار شمارش کرده‌ایم. پس جواب نهایی مسئله عبارت است از $\frac{۹!}{۴}$.

مثال ۲: با سه حرف a ، دو حرف b و چهار حرف c چند کلمه می‌توان ساخت؟ باید دقت کرد که جابجایی خود حرف a کلمه‌ی جدیدی ایجاد نمی‌کند. این مطلب در مورد حروف b و c نیز درست است.

حل: اگر تمام aها، bها و cها متمایز بودند، از آنجایی‌که تعداد کل آن‌ها $۹ = ۴ + ۲ + ۳$ است، جواب مسئله برابر با !۹ می‌شد. اکنون یک کلمه‌ی دلخواه مانند abcacaccb را در نظر بگیرید. خود aها باهم به!۳ طریق جابجا می‌شوند. پس جاجایی‌های aها که کاری غیرمجاز بود، تعداد شمارش را !۳ برابر کرده است. همچنین جایگشت bها تعداد شمارش شده را !۲برابر و جایگشت‌های cها تعداد شمارش شده را !۴ برابر کرده است. در نتیجه جواب مسئله عبارت است از $\frac{۹!}{۲!\times۳!\times۴!}$

مثال ۳: به چند طریق مختلف می‌توان ۸ نفر را دور یک میز نشاند، بطوریکه ۲ نفر خاص پیش هم نباشند؟

حل:

جواب = کل حالات چیدن ۸ نفر- حالات چیدن ۸ نفر به طوری‌که دو نفر خاص پیش هم باشند = $۷!-۶!\times۲!$

مثال ۴: به چند طریق می‌توان با یک مجری و ۵ نفر دیگر یک میزگرد چهارنفره به همراه آن مجری تشکیل داد؟

حل: ابتدا مجری را می‌نشانیم. پس از آن، از حالت جایگشت دوری خارج می‌شویم. در نتیجه برای چیدن بقیه $P(۵,۳)$ روش وجود دارد. جواب نهایی عبارت است از

$۱\times P(۵,۳) = ۶۰$

ترکیب

فرض کنید که در یک ظرف چهار مهره داریم که با برچسب‌های A، B، C و D مشخص شده‌اند. می‌خواهیم از این ظرف سه مهره را بیرون بیاوریم. سئوالی که در اینجا مطرح می‌شود، این است که این کار به چند روش امکان پذیر است؟

پیش از پاسخ به این مسئله بهتر است به این مطلب توجه داشته باشیم که اگر ابتدا A، سپس B و در نهایت C را انتخاب کنیم و در مرتبه بعدی ابتدا B، سپس C و در پایان A را انتخاب کنیم، نتیجه هر دو تلاشمان یکسان است؛ اگر چه ترتیب انتخاب‌هایمان متفاوت بوده است. بنابراین در این مسئله دیگر با جایگشت خطی سروکار نداریم. زیرا اگر بخواهیم تعداد جایگشت‌های خطی سه‌تایی از A، B، C و D را پیدا کنیم، جایگشت ABC با BCA متفاوت است اما در مسئله جدیدی که مطرح کرده‌ایم، ترتیب انتخاب حروف تأثیری در نتیجه نهایی مسئله ندارد بنابراین می‌توان گفت که تعداد روش‌های انتخاب سه مهره از چهار مهره A، B، C و D به صورت زیر است.

$$\{A,B,C\} \quad \{A,B,D\} \quad \{A,C,D\} \quad \{B,C,D\}$$

حال فرض کنید که بخواهیم از بین n مهره با برچسب‌های $A_۱, A_۲, A_۳, A_۴, \ldots, A_n$ سه مهره را انتخاب کنیم. تعداد روش‌های انتخاب چند تا است؟

پیدا کردن جواب در این حالت، مانند مثال قبل با نوشتن حالت‌های ممکن امکان‌پذیر نیست. زیرا اولا مقدار n را نمی‌دانیم و ثانیا این‌که اگر n عددی بسیار بزرگ باشد، نمی‌توان با نوشتن حالت‌ها به جواب رسید. برای حل کردن این مسئله از جایگشت خطی کمک می‌گیریم.

اگر بخواهیم تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از nتایی را به دست آوریم، داریم $P(n,۳) =$ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از nتایی (متمایز)

در مسئله انتخاب سه مهره به دلیل این‌که مثلا اگر سه مهره A_i, A_j, A_k، را به ترتیب‌های $A_iA_kA_j$، $A_jA_iA_k$، $A_jA_kA_i$، $A_kA_jA_i$، $A_kA_iA_j$ برداریم، هر $۶ = !۳$ حالت نتیجه یکی است و هر شش تای این حالات را یک روش در نظر می‌گیریم. بنابراین باید جواب $P(n,۳)$ را بر $!۳$ تقسیم کنیم. در نتیجه اگر بخواهیم از بین n مهره متمایز $A_۱, A_۲, \ldots A_n$ سه مهره را برداریم، جواب مسئله عبارت است از:

$$\frac{P(n,۳)}{۳!} = \frac{n!}{(n-۳)!۳!}$$

حال اگر بخواهیم از n مهره متمایز rتا مهره را برداریم $(۰ \le r \le n)$، پاسخ بنابر آن چه که از مسئله قبل آموختیم، عبارت خواهد بود از:

$$\frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

عبارت $\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$ را ترکیب r از n می‌نامیم و با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم. در برخی از کتاب‌ها از علامت C_r^n نیز استفاده می‌شود.

همان طور که پیدا است، جواب‌ها یا حالت‌های یک مسئله ترکیبی نسبت به مسئله جایگشت مشابه، کمتر یا حداکثر مساوی آن می‌تواند باشد. آیا می‌توانید بگویید که چه زمانی جایگشت خطی r از n با ترکیب r از n برابر می‌شود؟

$$P(n,r)=C(n,r)$$

$$\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}\Rightarrow r!=۱\Rightarrow\begin{cases}r=۰\\ \text{یا}\\ r=۱\end{cases}$$

در حالت کلی داریم:

$$C(n,r)\leq P(n,r)$$

برخی از خواص ترکیب:

۱)

$$C(n,n)=C(n,۰)=۱$$

۲)

$$C(n,r)=C(n,n-r)$$

۳)

$$C(n,۲)=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

اکنون به چند مثال حل شده توجه نمایید:

مثال ۱: در یک جعبه پنج کارت به رنگ‌های مختلف قرار دارند.

می‌خواهیم از این جعبه سه کارت بیرون بیاوریم. این کار به چند روش ممکن است؟

حل:

$$n=۵\ ,\ r=۳\Rightarrow C(۵,۳)=۱۰$$

مثال ۲: از بین ۷ مرد و ۶ زن به چند روش می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره که از سه مرد و دو زن تشکیل شده باشد، ایجاد کرد؟

حل:

$$C(۷,۳)\times C(۶,۲)=۳۵\times ۱۵=۵۲۵$$

$$C(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!\times ۳!}=\frac{۷!}{۴!\times ۳!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۴!\times ۳!}=۳۵$$

$$C(۶,۲)=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

مثال ۳: تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب را پیدا کنید.

حل: هر n ضلعی محدب دارای n رأس می‌باشد که هر کدام از این رئوس را به وسیله یک نقطه نشام می‌دهیم. می‌توان فرض کرد که این n نقطه روی یک دایره قرار دارند. این فرض از آنجا ناشی می‌شود که n ضلعی یاد شده یک n ضلعی محدب است. تعداد پاره‌خط‌هایی که این n نقطه را به هم وصل می‌کند، عبارت است از:

$$C(n,2)=\frac{n(n-1)}{2}$$

اکنون اگر از این مقدار n را کم کنیم، تعداد قطرها به دست می‌آید. زیرا $\frac{n(n-1)}{2}$ شامل تعداد رأس‌ها به اضافه تعداد قطرها است.

$$\text{تعداد قطرها}:\ \frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n(n-3)}{2}$$

مثال ۴: مجموعه‌ی A دارای ۸ عضو متمایز است. این مجموعه دارای چند زیر مجموعه ۳ عضوی است؟

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی}:\ C(8,3)=\frac{8!}{(8-3)!\times 3!}=\frac{8!}{5!\times 3!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 3!}=\frac{8\times 7\times 6}{3!}=8\times 7=56$$

مثال ۵: اگر مجموعه‌ای دارای n عضو متمایز باشد، دارای چند زیر مجموعه‌ی r عضوی است؟ ($0\le r\le n$)

حل: بنابر آنچه که در ترکیب گفته شد، تعداد زیر مجموعه‌های مذکور عبارت است از $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$

اگر مجموعه‌ای دارای n عضو متمایز باشد، می‌دانیم که تعداد کل زیر مجموعه‌های آن عبارت است از 2^n بنابراین از سوی دیگر نیز می‌توان نوشت:

$$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n-1)+C(n,n)=2^n$$

یا

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

با استفاده از نماد $\sum$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2$$

$s_{100}=a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ بر ۳ بخش‌پذیر نیستند؟

جایگشت با تکرار

فرض کنید n_1 شئ از نوع r_1 ، n_2 شئ از نوع r_2، ... و n_k شئ از نوع r_k داشته باشیم. اگر بخواهیم تعداد کل جایگشت‌های این اشیاء را به‌دست آوریم، چه می‌کنیم؟

برای پاسخ به این مسئله باید جایگشت‌های تکراری را نیز به حساب آوریم.

تعداد جایگشت‌های کل بدون در نظر گرفتن جایگشت‌های تکراری عبارت است از : $(n_1+n_2+...+n_k)!$ حال با توجه به این که تعداد جایگشت‌های r_1 برابر با $n_1!$، تعداد جایگشت‌های r_2 برابر با $n_2!$ و در نهایت تعداد جایگشت‌های r_k برابر با $n_k!$ است می‌توان پاسخ مسئله طرح شده را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{(n_1+n_2+n_3+...+n_k)!}{n_1!n_2!n_3!\times...\times n_k!} \text{ یا } \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k}(n_i!)}$$

اکنون به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱: چند جایگشت متمایز از حروف کلمه‌ی student وجود دارد؟

حل: تعداد حروف کلمه‌ی student برابر با هفت تاست که در آن حرف t دو بار تکرار شده است. پس تعداد جایگشت‌های مطلوب برابر است با :

$$\frac{7!}{1!\times1!\times1!\times1!\times1!\times2!}=\frac{7!}{2!}$$

مثال ۲: چند جایگشت متمایز از حروف کلمه‌ی mississippi وجود دارد؟

حل: حروف سازنده‌ی کلمه‌ی داده شده یازده تا هستند که در آن یک بار حرف m، چهار بار حرف i، چهار بار حرف s و دوبار حرف p ظاهر شده است. پس $n_1=1, n_2=4, n_3=4$ و $n_4=2$ می‌باشد، در نتیجه جواب عبارت است از:

$$\frac{11!}{1!\times4!\times4!\times2!}$$

مثال ۳: چند جایگشت از حروف کلمه‌ی management می‌توان یافت که در آن‌ها هیچ دو حرف صدا داری مجاور نیستند؟

حل: باید در ابتدا حروف بی‌صدا را در یک ردیف قرار داده و سپس حروف صدادار را لابه‌لای آن‌ها قرار دهیم. حروف بی‌صدا عبارتند از دو حرف n، با یک حرف g و یک حرف t. پس در مجموع $2+2+1+1=6$ حرف داریم: تعداد جایگشت‌های مربوط به این حروف بی‌صدا عبارت است از $\frac{6!}{2!\times2!}$. اگر حروف باصدا را با ◯ و حروف صدادار را با × نشان دهیم، کلیه‌ی جایگشت‌های مطلوب مسئله باید به شکل زیر باشند:

×◯×◯×◯×◯×◯×◯×

همان‌گونه که در شکل بالا دیده می‌شود، هفت مکان برای جاهای خالی وجود دارد که بایستی توسط حروف صدادار پر شود. حروف صدادار در این مسئله عبارتند از دو حرف a و دو حرف e. در ابتدا از بین هفت جایی که با علامت × مشخص شده‌اند، دو مکان را برای حرف e بر می‌داریم. این کار به $\binom{۷}{۲}$ روش ممکن است. پنج مکان خالی می‌ماند که باید دو مکان برای حرف a اختصاص یابد. این کار نیز به $\binom{۵}{۲}$ روش ممکن است. در نتیجه پاسخ نهایی مسئله عبارت است از :

$$\frac{۶!}{۲!\times۲!}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۵}{۲}$$

مثال۴ : در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی bookstore حروف o در کنار یکدیگر قرار دارند؟ (منظور این است که هر سه حرف o کنار هم باشند یا دو حرف o کنار هم باشند.)

حل: حروف تشکیل دهنده‌ی کلمه‌ی bookstore عبارتند از سه حرف o، یک حرف b، یک حرف k، یک حرف s، یک حرف t و یک حرف r و یک حرف t، بنابراین تعداد کل جایگشت‌های حروف این کلمه عبارت است از $\frac{۹!}{۳!}$.

برای حل این مسئله، شبیه به مثال ۳ عمل می‌کنیم، اما با این تفاوت که تعداد جایشگت‌هایی را پیدا می‌کنیم که در آن‌ها حروف o کنار یکدیگر قرار ندارند. سپس این تعداد را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم.

تعداد جایشگت‌هایی که در آن‌ها حروف o کنار یکدیگر نیستند، عبارت است از $۶!\times\binom{۷}{۳}$ در نتیجه پاسخ نهایی مسئله عبارت است از :

$$\frac{۹!}{۳!}-۶!\times\binom{۷}{۳}$$

مثال ۵: در چند جایشگت از حروف کلمه‌ی contents حروف صدادار همواره کنار یکدیگر قرار دارند؟

حل: حروف صدادار در این کلمه عبارتند از e و o که ما بنابر شرایط مسئله هر دو را در یک دسته قرار می‌دهیم.

$$\boxed{o,e},c,n,t,n,t,s$$

تعداد جایشگت‌های کل عبارت است از : $\frac{۷!}{۲!\times۲!}\times۲!=\frac{۷!}{۲!}$

مثال ۶: در چند جایگشت از حروف کلمه‌ی mathematics عبارت ma وجود دارد؟

حل: حروف کلمه‌ی mathematics را به صورت روبرو در نظر می‌گیریم: m,a,t,h,e,m,a,t,i,c,s

با توجه به حروف این کلمه می‌توان فهمید که کلیه‌ی جایگشت‌های این کلمه ممکن است یک یا دو عبارت ma داشته باشند.
تعداد جایگشت‌هایی که دارای دو عبارت ma هستند، عبارت است از :

$$\frac{۹!}{۲!\times ۲!} \qquad ma,ma,t,h,e,t,i,c,s$$

برای محاسبه‌ی جایگشت‌هایی که یک عبارت ma در آن‌ها دیده می‌شود، به روش زیر عمل می‌کنیم:
ابتدا دسته‌بندی حروف کلمه‌ی mathematics را به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$ma,t,h,e,m,a,t,i,c,s$$

کل جایگشت‌های حروف بالا را به دست آورده و منهای تکرار جایگشت‌هایی می‌کنیم که دو تا عبارت ma دارند.

$$\frac{۱۰!}{۲!}-\frac{۹!}{۲!\times ۲!}$$

مثال ۷: در چند جایگشت از ارقام ۵,۴,۴,۳,۳,۳,۲,۲,۲,۲,۱,۱,۱ اولین رقم ۱ قبل از اولین رقم ۲ و اولین رقم ۲ قبل از اولین رقم ۳ قرار دارد؟
حل: جایگشت‌های مربوط به ارقام داده شده، اعداد سیزده رقمی می‌سازند.
پس باید جایگشت‌ها به شکل زیر باشند:

□□□□□□□□□□□□□

کار شمارش را با قرار دادن ارقام ۵,۴,۴ در جاهای خالی شروع می‌کنیم، زیرا شرط خاصی روی این ارقام وجود ندارد، ابتدا رقم ۵ را در یکی از این سیزده خانه قرار می‌دهیم. پس برای رقم ۵ سیزده انتخاب وجود دارد. اکنون دوازده خانه خالی باقی مانده است که باید در دو تا از آن‌ها رقم‌های ۴ و ۴ قرار گیرند. این کار نیز به $\binom{۱۲}{۲}$ روش امکان‌پذیر است. تا اینجای کار ده خانه‌ی دیگر خالی مانده که باید پر شوند. بنابراین شرط داده نشده در مسئله باید اولین رقم ۱ قبل از اولین رقم ۲ بیاید. بنابراین در نخستین خانه‌ی خالی از ده خانه‌ی باقیمانده رقم ۱ را قرار می‌دهیم. نه خانه خالی می‌ماند که باید دو رقم یک باقیمانده در دو تا از آن‌ها جای می‌گیرند. این کار به $\binom{۹}{۲}$ روش دیگر امکان‌پذیر است. در نهایت هفت خانه‌ی خالی می‌ماند.
مشابه با حالت قبل، ابتدا نخستین خانه از این هفت خانه‌ی خالی را با یکی از چهار رقم ۲ پر می‌کنیم. شش خانه باقی می‌ماند.
در این شش خانه باید سه رقم ۲ قرار داد که بر $\binom{۶}{۳}$ روش ممکن است. در نتیجه پاسخ نهایی مسئله عبارت است از :

$$۱۳\times\binom{۱۲}{۲}\times\binom{۹}{۲}\times\binom{۶}{۳}$$

مثال ۸: چند جایگشت ۱۰حرفی از حروف کلمه‌ی mississippi وجود دارد؟
حل: به ازای هر جایگشت ۱۱ حرفی یک جایگشت ۱۰حرفی وجود دارد. پس جواب عبارت است از $\frac{۱۱!}{۴!\times۴!\times۲!}$. می‌توان جواب را از روش دیگری و به صورت زیر نیز به‌دست آورد.

$$\frac{۱۰!}{۴!\times۴!\times۲!}+\frac{۱۰!}{۳!\times۴!\times۲!}+\frac{۱۰!}{۴!\times۳!\times۲!}+\frac{۱۰!}{۴!\times۴!}$$