

## سوالات فردی پاسخ کوتاه

### آزمون مرحله‌ی نهایی

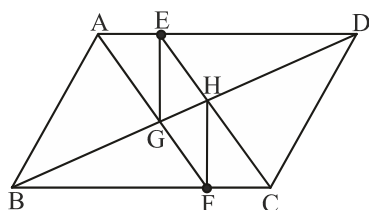
پایه‌ی دوم و سوم دبیرستان - رشته ریاضی

مدت زمان پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه

مرداد ۱۳۹۴

توضیحات: فقط جواب نهایی هر سوال را در قسمت مشخص شده برای آن بنویسید و از نوشتن هرگونه راه‌حل خودداری کنید. پاسخ خود را فقط با خودکار آبی نوشته و از به‌کار بردن لاک غلط‌گیر خودداری نمایید. استفاده از هرگونه وسیله‌ی الکترونیکی نظیر موبایل، تبلت و انواع ماشین حساب ممنوع است.

۱. شکل زیر متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد که در آن  $AB = ۳۶$  و  $AD = ۶۰$  هستند. قطر  $BD$  بر ضلع  $AB$  عمود است. نقاط  $E$  و  $F$  به ترتیب وسط اضلاع  $AD$  و  $BC$  قرار دارند. نقاط  $G$  و  $H$  نیز محل تقاطع  $BD$  با  $AF$  و  $CE$  می‌باشند. مساحت چهارضلعی  $EGFH$  چقدر است؟ (شکل به صورت واقعی رسم نشده است.)



۲. فرض کنید  $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$  و  $B = \{۰, ۱, ۲\}$ . تعداد جفت تابع‌های  $\{f, g\}$  را پیدا کنید که هم  $f$  و هم  $g$  از مجموعه  $A$  به  $B$  تعریف شوند و نیز دقیقاً دو عضو مانند  $x \in A$  وجود داشته باشند که  $f(x) = g(x)$  باشد. به عنوان مثال، تابع‌های  $f$  و  $g$  که به صورت زیر تعریف شده‌اند، این خاصیت را دارند.

$$f: ۱ \rightarrow ۰, ۲ \rightarrow ۱, ۳ \rightarrow ۰, ۴ \rightarrow ۲, ۵ \rightarrow ۱$$

$$g: ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ \rightarrow ۰$$

۳. دو چند ضلعی محدب در مجموع دارای ۳۳ ضلع و ۲۴۳ قطر هستند. چند قطر در چند ضلعی با تعداد اضلاع بیشتر وجود دارد؟
۴. تعدادی مکعب مستطیل چوبی به ابعاد  $۳ \times ۴ \times ۶$  در اختیار داریم. هر وجه (سطح) هر یک از این مکعب‌ها قرار است با یک رنگ، رنگ آمیزی شود. سه رنگ مختلف داریم. تعداد راه‌های مختلف رنگ آمیزی این مکعب مستطیل‌ها را به دست آورید.

۵. مقدار  $x$  را طوری به دست آورید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$\log_3(\log_9 x) = \log_9(\log_3 x)$$

۶. اگر داشته باشیم:  $f(x) = 2x + 3$  و  $g(x + 2) = f(f(x - 1))f(x + 1) + f(x)$  مقدار  $g(6)$  برابر با چه عددی است؟

۷. دنباله‌ی  $\{a_n\}$  به این صورت تعریف شده است که  $a_0 = 4$  و  $a_1 = 6$  و به ازای  $n \geq 1$  داریم  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ .

مقدار  $a_{2003}$  چیست؟

۸. چند عدد حقیقی مانند  $x$  در رابطه‌ی  $[x^2[x]] = x[x] + 1$  صدق می‌کنند؟ ( $[x]$  نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد  $x$  است).

۹. در کیسه‌ای ۱۷ توپ گذاشته‌ایم که با عددهایی به شکل  $125k + 5$  به ازای  $k = 0, 1, \dots, 16$  شماره‌گذاری شده‌اند.

یعنی عددها عبارتند از ۵، ۱۳۰، ۲۵۵، ۳۸۰، ۵۰۵، ۶۳۰، ۷۵۵، ۸۸۰، ۱۰۰۵، ۱۱۳۰، ۱۲۵۵، ۱۳۸۰، ۱۵۰۵، ۱۶۳۰، ۱۷۵۵. حداقل چند توپ را باید برداریم تا مطمئن شویم که دو توپ

در بین توپ‌های برداشته شده وجود دارند که جمع عددهای رویشان ۲۰۱۰ است؟

۱۰. در مثلث  $ABC$  داریم  $1 = 3 \cos A + 4 \sin B$  و  $6 = 4 \cos B + 3 \sin A$ . اندازه‌ی زاویه‌ی  $C$  چند درجه است؟