هوالعلیم

دفترچه پیش‌آزمون و سوالات
آزمون مرحله‌ی نیمه نهایی (۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۴)
رشته‌ی ریاضی پایه‌های دوم و سوم متوسطه

عنوان	صفحه	مدت زمان پاسخ‌گویی
پیش‌آزمون‌ها	۱۰-۲	۱۵ دقیقه
سوالات ۱ تا ۱۵ عمومی، سوالات ۱۶ تا ۲۵ اختصاصی براساس پیش‌آزمون	۱۲-۱۱	۴۰ دقیقه
پاسخ‌گویی به کلیه‌ی سوالات به صورت گروهی است. بنابراین توصیه می‌شود پس از جمع‌بندی نهایی یکی از اعضای گروه مسوولیت وارد کردن پاسخ‌ها را در پاسخ‌برگ داشته باشد.		
به ازای هر ۴ پاسخ اشتباه، امتیاز یک پاسخ صحیح از بین می‌رود.		

لطفا توجه نمایید:

لیگ علمی پایا در مقطع دبیرستان(دوره دوم) در قالب گروه‌های ۵ نفره در رشته‌های ریاضی، فیزیک، شیمی و زیست شناسی برگزار می‌گردد.

مرحله‌ی مقدماتی لیگ علمی پایا شامل پیش‌آزمون، سوالات عمومی و سوالات پیش‌آزمون است.

۱) در قسمت اول آزمون هر کدام از اعضای گروه باید پیش‌آزمون مربوط به خود را از دفترچه جدا نموده و به صورت انفرادی مطلب آموزشی (پیش‌آزمون) خود را در مدت زمان ۱۵ دقیقه مطالعه نماید و به خاطر بسپارند.

۲) قسمت دوم آزمون شامل پاسخ‌گویی به ۱۵ سوال تستی ۵ گزینه‌ای از مطالب کتاب‌های درسی و منابع معرفی شده دانش‌آموزان به صورت گروهی می‌باشد.

۳) بخش سوم سوالات شامل پاسخ‌گویی به ۱۰سوال تستی ۵ گزینه‌ای است که همه اعضای گروه به کمک هم و با استناد به مطالب آموزشی که در بخش قبل مطالعه کرده‌اند، به آن‌ها پاسخ می‌دهند.

تذکر ۱. هر یک از اعضای گروه ملزم به مطالعه یکی از پیش‌آزمون‌ها می‌باشند و در غیر این صورت تخلف در آزمون محسوب می‌شود.

تذکر ۲. چنان‌چه گروهی ۴ نفره باشد، یکی از اعضای گروه علاوه بر مطالعه پیش‌آزمون مربوط به خود مسوولیت مطالعه پیش‌آزمون ۵ را نیز بر عهده دارد.

تذکر ۳. چنان‌چه گروهی ۳ نفره باشد، یکی از اعضای گروه می‌تواند مسوولیت مطالعه پیش‌آزمون ۴ را برعهده بگیرد و گروه مجاز به مطالعه پیش‌آزمون ۵ نمی‌باشد.

تذکر ۴. دفترچه سوال دانش‌آموزان پایه‌ی دوم و سوم دبیرستان (دوره‌ی دوم) یکسان می‌باشد.

تذکر ۵. هنگام پاسخ‌گویی به سوالات نیاز به جمع‌آوری پیش‌آزمون‌ها از دانش‌آموزان نمی‌باشد.

پیش‌آزمون ۱

فرض کنید m عدد طبیعی باشد. می‌گوییم a و b به پیمانه‌ی m همنهشت هستند، اگر $a-b$ بر m بخش‌پذیر باشد؛ یعنی این‌که $m|a-b$. همنهشت بودن a و b را به پیمانه‌ی m به یکی از شکل‌های زیر نشان می‌دهیم:

$\overset{m}{a\equiv b}$ $a\equiv b(\bmod m)$ $a\equiv b$ (پیمانه m)

در حالتی که a و b به پیمانه‌ی m همنهشت نباشند، می‌نویسیم $\overset{m}{a\not\equiv b}$، $a\not\equiv b$ (پیمانه m) یا $a\not\equiv b(\bmod m)$

مثال: $\overset{۴}{۲۵\equiv -۷}$ زیرا $۴|۲۵-(-۷)$

$۱۷\equiv ۶۳$ (پیمانه۲۳) زیرا ۱۷ − ۶۳ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

$۹۵\not\equiv ۱۱(\bmod ۱۳)$ زیرا ۱۱ − ۹۵ بر ۱۳ بخش‌پذیر نیست.

قضیه‌ی۱: فرض کنید m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد، در این صورت:

۱- اگر باقیمانده‌ی تقسیم a بر m برابر r باشد، آن‌گاه $\overset{m}{a\equiv r}$

۲- $\overset{m}{a\equiv b}$ اگر و تنها اگر باقیمانده‌های تقسیم a و b بر m برابر باشند.

قضیه‌ی۲: فرض کنید m عدد طبیعی باشد. در این صورت:

۱- به ازای هر عدد صحیح a داریم: $\overset{m}{a\equiv a}$

۲- اگر $\overset{m}{a\equiv b}$ و $\overset{m}{b\equiv c}$ آن‌گاه $\overset{m}{a\equiv c}$

با استفاده از قضیه‌ی۲ نتیجه می‌گیریم که اگر $\overset{m}{a_۱\equiv a_۲}$، $\overset{m}{a_۲\equiv a_۳}$، و ... و $\overset{m}{a_{n-۱}\equiv a_n}$ آن‌گاه $\overset{m}{a_۱\equiv a_n}$

پیش‌آزمون ۲

فرض کنید m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد. دسته‌ی همنهشتی a به پیمانه‌ی m که آن را با $[a]_m$ نشان می‌دهیم، برابر مجموعه‌ی تمام اعدادی تعریف می‌کنیم که به پیمانه‌ی m با a همنهشت هستند. در واقع داریم:

$$[a]_m = \{x | a \overset{m}{\equiv} x\}$$

می‌دانیم $a \overset{m}{\equiv} a$ در نتیجه $a \in [a]_m$. بنابراین دسته‌ی همنهشتی a به پیمانه‌ی m مجموعه‌ای ناتهی است.

فرض کنید باقی‌مانده تقسیم x بر m برابر با r باشد. در این صورت $a \overset{m}{\equiv} x$ اگر و تنها اگر باقی‌مانده تقسیم x بر m برابر r باشد. لذا:

$$[a]_m = \{mq + r | q \in \mathbb{Z}\}$$

حال چنانچه $a \overset{m}{\equiv} b$ در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم b بر m نیز برابر r است. بنابراین $[b]_m = \{mq + r | q \in \mathbb{Z}\}$. پس $[a]_m = [b]_m$ و در صورتی‌که $a \overset{m}{\not\equiv} b$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم b بر m برابر r' باشد در این صورت $r \neq r'$ و

$$[b]_m = \{mq + r' | q \in \mathbb{Z}\}$$

مطالب گفته شده تاکنون را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- به ازای هر عدد صحیح a ، $a \in [a]_m$

۲- اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آن‌گاه $[a]_m = [b]_m$

۳- اگر $a \overset{m}{\not\equiv} b$ آن‌گاه $[a]_m \cap [b]_m = \phi$

مسئله‌ی۱: بزرگ‌ترین عدد سه رقمی را که در دسته همنهشتی $[۲۵]_{۱۷}$ قرار دارد، بیابید.

حل: چون باقی‌مانده تقسیم ۲۵ بر ۱۷ برابر ۸ است، هر عضو دسته‌ی همنهشتی $[۲۵]_{۱۷}$ به‌صورت $۱۷q + ۸$ است.

$$۱۷q+۸\leq ۹۹۹\Rightarrow q\leq ۵۸$$

$۱۷\times ۵۸+۸=۹۹۴ \rightarrow$ جواب

مسئله۲: اعداد ۴۱ و ۱۳۲ در یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m قرار دارند. $(m>۱)$ حداقل مقدار m را پیدا کنید.

حل: چون اعداد ۴۱ و ۱۳۲ در یک دسته‌ی همنهشتی به پیمانه‌ی m قرار دارند، لذا $۱۳۲\overset{m}{\equiv}۴۱$ بنابراین $m|۱۳۲-۴۱$ و $m|۹۱$. در بین تمام مقسوم‌علیه‌های ۹۱ که از ۱ بزرگ‌ترند، کوچک‌ترین عدد برابر ۷ است. در نتیجه جواب این مسئله برابر ۷ است.

مسئله۳: ثابت کنید. $[۵۷]_{۱۵}\subset[۳۲]_{۵}$

حل:

$$x\in[۵۷]_{۱۵}\Rightarrow x\overset{۱۵}{\equiv}۵۷\Rightarrow ۱۵|x-۵۷$$

$$۵|۱۵\Rightarrow ۵|x-۵۷\Rightarrow ۵|(x-۵۷)+۲۵\Rightarrow ۵|x-۳۲\Rightarrow$$

$$x\overset{۵}{\equiv}۳۲\Rightarrow x\in[۳۲]_{۵}$$

بنابراین به ازای هر عضو دلخواه مانند x رابطه‌ی بالا برقرار است.

پیش‌آزمون ۳

اگر دو عدد صحیح a و b بر m باقی‌مانده‌ی برابری داشته باشند، می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$.

فرض کنید m عددی طبیعی و a و b اعدادی صحیح باشند، به‌طوری که $a\overset{m}{\equiv}b$ در این صورت به ازای هر عدد صحیح c ، داریم:

$$a+c\overset{m}{\equiv}b+c \qquad\qquad ac\overset{m}{\equiv}bc$$

اثبات: از $a\overset{m}{\equiv}b$ نتیجه می‌گیریم $m|a-b$. در نتیجه $m|(a+c)-(b+c)$ و $m|ac-bc$.

بنابراین $a+c\overset{m}{\equiv}b+c$ و $ac\overset{m}{\equiv}bc$

همچنین فرض کنید $a\overset{m}{\equiv}b$ و $c\overset{m}{\equiv}d$ در این صورت $a+c\overset{m}{\equiv}d+b$ و $ac\overset{m}{\equiv}bd$. ضمناً به ازای هر دو عدد صحیح x و y داریم:

$$ax+cy\overset{m}{\equiv}bx+dy$$

حکم بالا را می‌توان به ازای n عدد صحیح نیز تعمیم داد:

$$\begin{cases} a_1\overset{m}{\equiv}b_1 \\ a_2\overset{m}{\equiv}b_2 \\ \vdots \\ a_n\overset{m}{\equiv}b_n \end{cases} \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n\overset{m}{\equiv}b_1+b_2+\ldots+b_n$$

$$a_1a_2\times\ldots\times a_n\overset{m}{\equiv}b_1\times b_2\times\ldots\times b_n$$
$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\overset{m}{\equiv}b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n$$
$$(x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{Z})$$

قضیه: فرض کنید $a\overset{m}{\equiv}b$ و n عددی طبیعی باشد. در این صورت $a^n\overset{m}{\equiv}b^n$. همچنین به ازای هر $n+1$ عدد صحیح $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_n$ داریم:

$$c_na^n+c_{n-1}a^{n-1}+\ldots+c_1a+c_0\overset{m}{\equiv}c_nb^n+c_{n-1}b^{n-1}+\ldots+c_1b+c_0$$

با توجه به نتیجه‌ی اخیر، اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $P(x)$ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، آن‌گاه $P(a)\overset{m}{\equiv}P(b)$. منظور از تحویل یک عدد به پیمانه‌ی m یافتن عدد صحیح کوچک‌تر است که به پیمانه‌ی m با آن عدد همنهشت باشد.

یک دسته‌ی مهم از مسائل همنهشتی مربوط به محاسبه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم اعدادی به صورت a^n برعدد طبیعی داده

شده‌ی m است که $(a,m)=۱$ (منظور از (a,m) ب.م.م a و m است). به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال۱: باقیمانده‌ی تقسیم $۲^{۱۰۰}$ بر ۵ را پیدا کنید.

$$۲^۲ \overset{۵}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^۲)^{۵۰} \overset{۵}{\equiv} (-۱)^{۵۰} \Rightarrow ۲^{۱۰۰} \overset{۵}{\equiv} ۱$$

مثال۲: باقیمانده‌ی تقسیم $۲^{۱۰۰}$ بر ۷ را پیدا کنید.

$$۲^۳ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^۳)^{۳۳} \overset{۷}{\equiv} ۱^{۳۳} \Rightarrow ۲^{۹۹} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow$$
$$۲ \times ۲^{۹۹} \overset{۷}{\equiv} ۲ \times ۱ \Rightarrow ۲^{۱۰۰} \overset{۷}{\equiv} ۲$$

مثال۳: باقیمانده‌ی $۲^{۱۰۰}$ بر ۹ را پیدا کنید.

$$۲^۳ \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^۳)^{۳۳} \overset{۹}{\equiv} (-۱)^{۳۳} \Rightarrow ۲^{۹۹} \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow$$
$$۲ \times ۲^{۹۹} \overset{۹}{\equiv} ۲ \times (-۱) \Rightarrow ۲^{۱۰۰} \overset{۹}{\equiv} -۲ \Rightarrow ۲^{۱۰۰} \overset{۹}{\equiv} ۷$$

مثال۴: باقیمانده‌ی تقسیم $۲^{۱۰۰}$ بر ۱۹ را پیدا کنید.

$$۲^۹ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۸ \Rightarrow ۲^۹ \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^۹)^{۱۱} \overset{۱۹}{\equiv} (-۱)^{۱۱} \Rightarrow$$
$$۲^{۹۹} \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۲^{۱۰۰} \overset{۱۹}{\equiv} -۲ \Rightarrow ۲^{۱۰۰} \overset{۱۹}{\equiv} ۱۷$$

پیش‌آزمون ۴

اگر دو عدد صحیح a و b بر عدد طبیعی m در عمل تقسیم باقیمانده‌ی یکسانی داشته باشند، می‌گوییم که a و b به پیمانه‌ی m همنهشت هستند و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$.

فرض کنید $a\overset{m}{\equiv}b$ و t مقسوم علیه‌ای از m باشد. در این صورت $a\overset{t}{\equiv}b$ زیرا از $a\overset{m}{\equiv}b$ نتیجه می‌شود که $m|a-b$.

$$\begin{aligned}&m|a-b\\&t|m\Rightarrow t|a-b\Rightarrow a\overset{t}{\equiv}b\end{aligned}$$

همچنین اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی k داریم $ka\overset{km}{\equiv}kb$. زیرا

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m|a-b\Rightarrow km|ka-kb\Rightarrow ka\overset{km}{\equiv}kb$$

قضیه: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$ در این صورت $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$ (منظور از $[m,n]$ ک.م.م دو عدد m و n است.)

اثبات:

$$\left.\begin{aligned}&a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m|a-b\\&a\overset{n}{\equiv}b\Rightarrow n|a-b\end{aligned}\right\}\Rightarrow[m,n]\,|a-b\Rightarrow a\overset{[m,n]}{\equiv}b$$

نتیجه‌ای که از قضیه‌ی بالا می‌گیریم، این است که اگر $a\overset{m_۱}{\equiv}b$ ، $a\overset{m_۲}{\equiv}b$ و ... $a\overset{m_n}{\equiv}b$ آن‌گاه:

$$a\overset{[m_۱,m_۲,\ldots,m_n]}{\equiv}b$$

اکنون به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال۱: فرض کنید $a\overset{۶}{\equiv}۲۰$ باقیمانده‌ی تقسیم $۳۰a$ بر ۴۵ چند است؟

حل:

$$a \overset{۶}{\equiv} ۲۰ \overset{۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۰a \overset{۱۸۰}{\equiv} ۶۰$$

چون ۴۵ یکی از مقسوم‌علیه‌های ۱۸۰ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$۳۰a \overset{۴۵}{\equiv} ۶۰ \overset{۴۵}{\equiv} ۱۵$$

مثال۲: فرض کنید $a \overset{۹}{\equiv} ۵$ و $a \overset{۱۱}{\equiv} ۷$. باقیمانده‌ی تقسیم a بر ۹۹ را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۱۱a \overset{۹۹}{\equiv} ۵۵ \\ a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۹a \overset{۹۹}{\equiv} ۶۳ \end{array}\right\} \Rightarrow ۵\times ۹a - ۴\times ۱۱a \overset{۹۹}{\equiv} ۵\times ۶۳ - ۴\times ۵۵ \Rightarrow$$

$$۴۵a - ۴۴a \overset{۹}{\equiv} ۳۱۵ - ۲۲۰ \Rightarrow a \overset{۹۹}{\equiv} ۹۵$$

مثال۳: ثابت کنید: $۳^{۱۰۰} + ۴^{۱۰۰} \overset{۱۲}{\equiv} ۱$

$$a = ۳^{۱۰۰} + ۴^{۱۰۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۳ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳^{۱۰۰} \overset{۳}{\equiv} ۰ \\ ۴ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴^{۱۰۰} \overset{۳}{\equiv} ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۰ + ۱ \Rightarrow a \overset{۳}{\equiv} ۱$$

قضیه: فرض کنید $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m,c) = d$ (منظور از (m,c) ب.م.م m و c است). در این صورت $a \overset{(\frac{m}{d})}{\equiv} b$

پیش‌آزمون ۵

هرگاه دو عدد صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m دارای باقیمانده‌های برابر باشند، می‌گوییم که a و b به پیمانه‌ی m همنهشت هستند و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$.

قضیه‌ی فِرما: فرض کنید p عددی اول باشد. در این صورت به ازای هر عدد صحیح a داریم:

$a^p\overset{p}{\equiv}a$. در صورتی‌که $p\nmid a$ ، $a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$

مثال۱: باقی‌مانده‌ی تقسیم $۶^{۱۰۰۰}$ بر ۲۳ را به‌دست آورید.

حل: چون ۲۳ عددی اول است، بنا بر قضیه‌ی فرما داریم: $۶^{۲۲}\overset{۲۳}{\equiv}۱$

طرفین این رابطه را به توان ۴۵ می‌رسانیم. داریم:

$$۶^{۹۹۰}\overset{۲۳}{\equiv}۱\Rightarrow ۶^{۱۰}\times ۶^{۹۹۰}\overset{۲۳}{\equiv}۶^{۱۰}\times ۱\Rightarrow ۶^{۱۰۰۰}\overset{۲۳}{\equiv}۶^{۱۰}$$

$$۶^{۲}\overset{۲۳}{\equiv}۱۳\Rightarrow ۶^{۳}\overset{۲۳}{\equiv}۷۸\overset{۲۳}{\equiv}۹\Rightarrow ۶^{۵}\overset{۲۳}{\equiv}۶^{۲}\times ۶^{۳}\overset{۲۳}{\equiv}۱۳\times ۹$$

$$۶^{۵}\overset{۲۳}{\equiv}۱۱۷\overset{۲۳}{\equiv}۲\Rightarrow ۶^{۱۰}\overset{۲۳}{\equiv}(۶^{۵})^{۲}\overset{۲۳}{\equiv}۴$$

بنابراین باقیمانده‌ی تقسیم $۶^{۱۰۰۰}$ بر ۲۳ برابر ۴ است.

مثال۲: همه‌ی اعداد اول p را بیابید به گونه‌ای که $p|۱۵^p+۱۱$

حل: اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه بنا بر قضیه‌ی فرما $۱۵^p\overset{p}{\equiv}۱۵$ و در نتیجه می‌توان نوشت $۱۵^p+۱۱\overset{p}{\equiv}۱۵+۱۱$ و $۱۵^p+۱۱\overset{p}{\equiv}۲۶$ حال اگر $p|۱۵^p+۱۱$ آن گاه $۱۵^p+۱۱\overset{p}{\equiv}۰$ در نتیجه $۲۶\overset{p}{\equiv}۰$ و $p|۲۶$. بنابراین $p=۲$ یا $p=۱۳$ خواهد بود.

قضیه‌ی ویلسون: فرض کنید p عددی اول باشد در این صورت $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$

مثال: ثابت کنید $63! \overset{71}{\equiv} -1$

$$70! = 70\times 69\times 68\times 67\times 66\times 65\times 64\times 63! \overset{71}{\equiv}$$

$$(-1)\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)\times(-6)\times(-7)\times 63! \overset{71}{\equiv}$$

$$-(2\times 5\times 7)\times(3\times 4\times 6)\times 63! \overset{71}{\equiv} -70\times 72\times 63! \overset{71}{\equiv}$$

$$-(-1)\times 1\times 63! \overset{71}{\equiv} 63!$$

بنابراین $70! \overset{71}{\equiv} 63!$ و چون $70! \overset{71}{\equiv} -1$

در نتیجه $63! \overset{71}{\equiv} -1$

سوالات عمومی

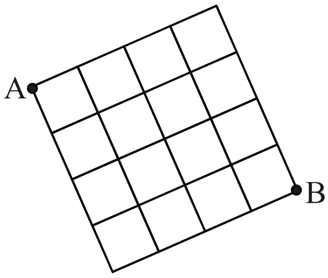
۱. معادله‌ی $\sin^{۲}(۳۲x)+\sin^{۲}(۲۴x)=۰$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰ ۵) ۱۱

۲. با توجه به این‌که y,x و z اعدادی حقیقی‌اند و $x+y+z=۵$ و $xy+yz+zx=۳$ حداکثر مقدار ممکن برای z کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) $\frac{۱۱}{۹}$ ۵) $\frac{۱۷}{۹}$

۳. دو نفر به‌نام‌های A و B در نقطه‌های مشخص شده در شکل زیر قرار دارند. شکل از مربع‌های واحد ساخته شده است، در هر ثانیه A یک واحد به سمت راست و B یک واحد به سمت چپ روی خط‌های شبکه حرکت می‌کند. هرگاه دو راه در مقابل یک فرد وجود داشته باشد، با احتمال یکسان یکی از آن دو را انتخاب می‌کند. احتمال این‌که A و B به هم برسند، چه قدر است؟



۱) $\frac{۲۵}{۲۵۶}$ ۲) $\frac{۳۰}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۳۵}{۲۵۶}$ ۴) $\frac{۲۰}{۱۲۸}$ ۵) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$

۴. اگر دنباله ی هندسی $\{a_n\}$ در شرط $a_{۲۰۰۳}<a_{۲۰۰۲}<a_{۲۰۰۴}$ صدق کند

۱) $-a_{۲۰۰۳}\times a_{۲۰۰۴}<۰$ ۲) $a_{۲۰۰۲}\times a_{۲۰۰۳}<۰$ ۳) $a_{۲۰۰۲}\times a_{۲۰۰۴}<۰$ ۴) $a_{۲۰۰۲}\times a_{۲۰۰۳}>۰$ ۵) هیچکدام

۵. معادله‌ی $x=[\frac{x}{۲}]+[\frac{x}{۳}]+[\frac{x}{۵}]$ چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد؟ ($[x]$ به معنی جزء صحیح x است.)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۶۰ ۵) بی‌شمار

۶. تابع f به صورت $f:\mathbb{N}\longrightarrow Q^{+}$ به صورت زیر تعریف شده است: $f(۱)=۱$ و $f(۱)+f(۲)+...+f(\mathrm{n})=\mathrm{n}^{۲}f(n)$ مقدار $f(۱۳۸۸)$ کدام است؟

۱) $۱۳۸۸^{۲}$ ۲) $\frac{۱۳۸۹\times ۱۳۸۸}{۲}$ ۳) $۱۳۸۸^{۳}$ ۴) ۱ ۵) هیچکدام

۷. فرض کنید $x^{۴}+۲x^{۲}$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ محدود شده باشد. دامنه‌ی تغییرات x زیر مجموعه‌ی کدام‌یک از بازه‌های زیر است؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}]$ ۳) $[-\frac{۱}{۳},۱]$ ۴) $[-۱,\frac{۱}{۳}]$ ۵) $[\frac{-۵}{۳},-۱]$

۸. یک جدول ۹×۹ از اعداد صفر و یک داده شده است. در هر چهار خانه‌ای که تشکیل یک مربع ۲×۲ می‌دهند، حداقل ۲ و حداکثر ۳ بار عدد یک ظاهر شده است. حداقل و حداکثر تعداد یک‌های جدول کدام است؟

۱) ۴۱ و ۶۵ ۲) ۴۰ و ۶۱ ۳) ۳۶ و ۶۵ ۴) ۴۰ و ۶۵ ۵) ۳۶ و ۶۱

۹. اگر $f:\mathrm{Z}^{+}\longrightarrow Z^{+}$ و $f(n+۱)>f(n)$ و $f(f(n))=۳n$ مقدار $f(۹)$ برابر با چه عددی است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴ ۵) ۱۸

۱۰. طول قطرهای یک ذوزنقه برابر با ۱۳ و ۱۵ و ارتفاعش برابر با ۱۲ است. مساحت این ذوزنقه برابر است با:

۱) ۵۶ ۲) ۷۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶ ۵) ۱۱۲

۱۱. در مثلث ADB، C روی AD است و پاره‌خط CB بر AB عمود می‌باشد. اگر $C\hat{B}D = 30^\circ$ باشد، طول AC برابر با چه عددی است؟ $(AB = CD = 1)$

۱) $\sqrt[3]{2}$ ۲) $\sqrt[3]{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$ ۵) $\sqrt{3}$

۱۲. دو نفر روی مبدأ محور x ایستاده‌اند. در هر حرکت هر کدام مستقل یک واحد به چپ یا راست می روند. به چند روش این دو نفر می‌توانند پس از پنج حرکت در یک مکان باشند؟

۱) ۷۰ ۲) ۱۲۷ ۳) ۱۹۷ ۴) ۲۵۲ ۵) ۲۵۶

۱۳. تابع f دارای ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + \sqrt{x^4+1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{x^4+1}}$ است. مقدار $f(1999^{2000})$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{1999^{2000}}$ ۲) $-\frac{1}{1999^{1000}}$ ۳) صفر ۴) $\frac{1}{1999^{2000}}$ ۵) $\frac{1}{1999^{1000}}$

۱۴. زاویه های مثلثی به نسبت ۱، ۵ و ۶ هستند. طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث $6cm$ است. طول ارتفاع عمود بر این ضلع چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵ ۵) ۳

۱۵. کدام گزینه از بقیه بزرگ‌تر است؟

۱) $\log_2 5$ ۲) $\log_3 8$ ۳) $\log_5 10$ ۴) $\log_{1/5} 6$ ۵) $\log_{12} 4$

سوالات اختصاصی

۱۶. باقیمانده‌ی تقسیم $\frac{100!}{1!}+\frac{100!}{2!}+\dots+\frac{100!}{100!}$ بر ۱۵ برابر با چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۱ ۵) ۲

۱۷. کدام گزینه به مجموعه‌ی $[46]_7$ تعلق دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۹۱ ۴) ۱۳ ۵) ۷۵

۱۸. فرض کنید باقیمانده‌ی تقسیم a بر ۱۱ برابر ۳ باشد. باقیمانده‌ی تقسیم $2a^3+5a^2-9a+1$ بر ۱۱ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۶ ۵) ۱

۱۹. باقیمانده‌ی تقسیم 133^{235} بر ۱۶ برابر است با:

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۹ ۴) ۱۰ ۵) ۷

۲۰. به ازای چند مقدار a از مجموعه‌ی $\{1,2,3,\dots,100\}$ معادله‌ی همنهشتی $ax \overset{12}{\equiv} 26$ جواب دارد؟

۱) ۵۰ ۲) ۴۱ ۳) ۶۷ ۴) ۷۰ ۵) ۵۵

۲۱. در میان باقیمانده‌های تقسیم اعداد مجموعه‌ی $\{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ بر ۱۱ چند عدد مختلف وجود دارد؟

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۵ ۵) ۷

۲۲. باقیمانده‌ی تقسیم $26!$ بر ۲۹ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۸ ۳) ۱ ۴) ۱۴ ۵) ۱۸

۲۳. اگر $x^{17}+5x \overset{17}{\equiv} 3$، کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند به جای x قرار گیرد؟ $(K \in \mathbb{Z})$

۱) $8K+3$ ۲) $17K+9$ ۳) $14K+10$ ۴) $19K+6$ ۵) $21K+2$

۲۴. باقیمانده‌ی تقسیم 9^{34} بر ۳۷ کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۱۹ ۳) ۲۴ ۴) ۷ ۵) ۱۶

۲۵. چند عدد اول P را می‌توان پیدا کرد که برای آن‌ها داشته باشیم $P \mid 21^{P-1}+14$ ؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۳