هوالعلیم

دفترچه پیش‌آزمون و سوالات
آزمون مرحله‌ی نیمه نهایی(۲۵ اردیبهشت ماه ۱۳۹۴)
رشته‌ی ریاضی پایه‌ی اول متوسطه

عنوان	صفحه	مدت زمان پاسخ‌گویی
پیش‌آزمون‌ها	۱۰-۲	۱۵ دقیقه
سوالات ۱ تا ۱۵ عمومی، سوالات ۱۶ تا ۲۵ اختصاصی براساس پیش‌آزمون	۱۲-۱۱	۴۰ دقیقه
پاسخ‌گویی به کلیه‌ی سوالات به صورت گروهی است. بنابراین توصیه می‌شود پس از جمع‌بندی نهایی یکی از اعضای گروه مسوولیت وارد کردن پاسخ‌ها را در پاسخ‌برگ داشته باشد.		
به ازای هر ۴ پاسخ اشتباه، امتیاز یک پاسخ صحیح از بین می‌رود.		

لطفا توجه نمایید:

لیگ علمی پایا در مقطع دبیرستان (دوره دوم) در قالب گروه‌های ۵ نفره در رشته‌های ریاضی، فیزیک، شیمی و زیست شناسی برگزار می‌گردد.

مرحله مقدماتی لیگ علمی پایا شامل پیش‌آزمون، سوالات عمومی و سوالات پیش‌آزمون است.

۱) در قسمت اول آزمون هر یک از اعضای گروه باید پیش‌آزمون مربوط به خود را از دفترچه جدا نموده و به صورت انفرادی مطلب آموزشی (پیش‌آزمون) خود را در مدت زمان ۱۵ دقیقه مطالعه نماید و به خاطر بسپارند.

۲) قسمت دوم آزمون شامل پاسخ‌گویی به ۱۵ سوال تستی ۵ گزینه‌ای از مطالب کتاب‌های درسی و منابع معرفی شده دانش‌آموزان به صورت گروهی می‌باشد که هر یک از پایه‌های اول، دوم و سوم متوسطه بایستی به سوالات ویژه خود پاسخ دهند.

۳) بخش سوم سوالات شامل پاسخ‌گویی به ۱۰سوال تستی ۵ گزینه‌ای است که همه اعضای گروه به کمک هم و با استناد به مطالب آموزشی که در بخش قبل مطالعه کرده‌اند به آن‌ها پاسخ می‌دهند.

تذکر ۱. هر یک از اعضای گروه ملزم به مطالعه یکی از پیش‌آزمون‌ها می‌باشند و در غیر این صورت تخلف در آزمون محسوب می‌شود.

تذکر ۲. چنانچه گروهی ۴ نفره باشد، یکی از اعضای گروه علاوه بر مطالعه پیش‌آزمون مربوط به خود مسوولیت مطالعه پیش‌آزمون ۵ را نیز بر عهده دارد.

تذکر ۳. چنانچه گروهی ۳ نفره باشد، یکی از اعضای گروه می‌تواند مسوولیت مطالعه پیش‌آزمون ۴ را برعهده بگیرد و گروه مجاز به مطالعه پیش‌آزمون ۵ نمی‌باشد.

تذکر ۴. هنگام پاسخ‌گویی به سوالات نیاز به جمع‌آوری پیش‌آزمون‌ها از دانش‌آموزان نمی‌باشد.

پیش‌آزمون ۱

در یک تعریف بسیار ساده، معادله‌ی دیوفانتی به معادله‌ای گفته می‌شود که به دنبال جواب‌های صحیح آن هستیم؛ مثلاً معادله‌ی $2x+y=3$ دیوفانتی است. تعداد جواب‌های یک معادله‌ی دیوفانتی ممکن است محدود یا نامحدود باشد. برخی از اوقات نیز هیچ جوابی برای یک معادله‌ی دیوفانتی یافت نمی شود.

معادلات دیوفانتی انواع گوناگونی دارند و طبعاً روش حل آن‌ها نیز با یکدیگر متفاوت است. یکی از راه‌های حل معادلات دیوفانتی استفاده از تجزیه است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال۱: تمام جواب‌های صحیح معادله‌ی $x^2-y^2=5$ را به‌دست آورید.

حل:

$$x^2-y^2=5 \Rightarrow (x-y)(x+y)=5 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow x=3\ ,\ y=2$$

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-5 \end{cases} \Rightarrow x=-3\ ,\ y=-2$$

$$\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow x=3\ ,\ y=-2$$

$$\begin{cases} x-y=-5 \\ x+y=-1 \end{cases} \Rightarrow x=-3\ ,\ y=2$$

مثال۲: همه‌ی زوج‌های صحیح و نامنفی $(x\ ,y)$ را بیابید که در معادله مقابل صدق می‌کنند: $(xy-7)^2=x^2+y^2$

حل: معادله‌ی فوق هم ارز با معادله‌ی $(xy-6)^2+13=(x+y)^2$ است.

اثبات:

$$(xy-7)^2=x^2+y^2$$
$$x^2y^2-14xy+49=x^2+y^2$$
$$(x^2y^2-12xy+36)-2xy+13=x^2+y^2$$
$$(xy-6)^2+13=x^2+y^2+2xy$$
$$(xy-6)^2+13=(x+y)^2$$

در نتیجه:

$$(xy-6)^2+13=(x+y)^2 \Rightarrow (xy-6)^2-(x+y)^2=-13 \Rightarrow$$
$$[xy-6-(x+y)][xy-6+(x+y)]=-13 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} xy-6-(x+y)=-1 \\ xy-6+(x+y)=13 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} xy-6-(x+y)=-13 \\ xy-6+(x+y)=1 \end{cases}$$

این دستگاه‌ها با دستگاه‌های معادلات زیر هم ارزش هستند.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x+y=7 \\ xy=0 \end{cases}$$

در نتیجه جواب‌های معادله‌ی داده شده عبارتند از:

$$(3,4),(4,3)\ ,(0,7)\ ,(7\ ,0)$$

پیش‌آزمون ۲

در یک تعریف بسیار ساده، معادله‌ی دیوفانتی به معادله‌ای گفته می‌شود که به‌دنبال جواب‌های صحیح آن هستیم؛ مثلاً معادله‌ی $x+2y=6$ با شرط پیدا کردن جواب‌های صحیح آن، یک معادله‌ی دیوفانتی است. تعداد جواب‌های یک معادله‌ی دیوفانتی ممکن است محدود یا نامحدود باشد. برخی اوقات نیز هیچ جوابی برای یک معادله‌ی دیوفانتی یافت نمی‌شود.

معادلات دیوفانتی انواع گوناگونی دارند و طبعاً روش‌های حل آن‌ها نیز با یکدیگر متفاوت است. یکی از راه‌های حل معادلات دیوفانتی استفاده از روش همنهشتی است. در حل مثال‌های زیر با این روش آشنا می‌شوید:

مثال۱: نشان دهید معادله ی زیر در مجموعه‌ی اعداد صحیح جوابی ندارد.

$$(x+1)^2+(x+2)^2+\dots+(x+2001)^2=y^2$$

حل: قرار می‌دهیم $x=Z-1001$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$(Z-1000)^2+\dots+(Z-1)^2+Z^2+(Z+1)^2+\dots+(Z+1000)^2=y^2$$

پس از ساده کردن داریم:

$$2001Z^2+2(1^2+2^2+\dots+1000^2)=y^2$$

$$2001Z^2+2\times\frac{1000\times1001\times2001}{6}=y^2$$

$$2001Z^2+1000\times1001\times667=y^2$$

همان‌طور که در معادله‌ی بالا دیده می‌شود، طرف چپ معادله بر ۳ بخش‌پذیر نبوده و باقی‌مانده در تقسیم بر ۳ برابر ۲ می‌باشد. بنابراین طرف راست معادله یعنی y^2 نیز نباید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. همان‌طور که می‌دانیم هیچ عدد مربع کاملی در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ی ۲ به‌دست نمی‌دهد. در نتیجه معادله‌ی مذکور جوابی در مجموعه‌ی اعداد صحیح ندارد.

مثال۲: معادله ی $x^5-y^2=4$ چند دسته جواب متمایز در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارد؟

حل: معادله را از نظر بخش‌پذیری بر ۱۱ مورد آزمایش قرار می‌دهیم. ابتدا معادله را به‌صورت $x^۵ - ۴ = y^۲$ در می‌آوریم. باقی‌مانده تقسیم عبارت $x^۵ - ۴$ در صورتی که x عدد صحیح فرض شود، برابر با یکی از اعداد ۶ ، ۷ یا ۸ است. اما باقی‌مانده‌ی $y^۲$ در صورتی که y عددی صحیح باشد، یکی از اعداد ۵,۴,۳,۱,۰ یا ۹ است. با توجه به این دو نتیجه، می‌توان گفت که معادله‌ی $x^۵ - ۴ = y^۲$ و در نتیجه معادله‌ی $x^۵ - y^۲ = ۴$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح پاسخی ندارد.

پیش‌آزمون ۳

هر معادله به شکل $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$ را که در آن $a_1,a_2,...,a_n$ و b اعدادی صحیح و ثابت هستند، معادله‌ی دیوفانتی خطی می‌نامیم. فرض می‌کنیم $n\geq 1$ و ضرایب یاد شده را همگی مخالف صفر در نظر می‌گیریم.

قضیه: معادله‌ی $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=b$ موقعی در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب دارد که $(a_1,a_2,...,a_n)|b$. به عبارت دیگر ب.م.م $a_1,a_2,...,a_n$ مقسوم‌علیه‌ای (شمارنده‌ای) از b باشد.

همچنین در حالتی که معادله حل‌شدنی باشد، همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی بالا را می‌توان بر حسب $n-1$ پارامتر صحیح نمایش داد. به عنوان مثال اگر (x_0,y_0) جواب صحیح معادله‌ی $a_1x_1+a_2x_2=b$ باشد، آن گاه همه‌ی جواب‌های صحیح این معادله از رابطه‌ی $\begin{cases}x_1=x_0+a_2t\\x_2=y_0-a_1t\end{cases}$ به‌دست می‌آیند که در این جا $t\in\mathbb{Z}$ است و پارامتر می‌باشد.

برای هر n عدد طبیعی $a_1,a_2,...,a_n$ که نسبت به هم اول باشند، بزرگ‌ترین عدد طبیعی N را که به ازای آن معادله‌ی $a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n=N$ در اعداد صحیح نامنفی، حل شدنی نباشد، با $g(a_1,a_2,....,a_n)$ نمایش می‌دهیم. مسئله‌ی تعیین $g(a_1,a_2,...,a_n)$ تحت عنوان مسئله‌ی سکه‌های فروبنیوس مشهور است.

در سال ۱۸۸۴ «سیلوستر» قضیه‌ی زیر را ثابت کرد:

فرض کنید a و b اعداد طبیعی‌اند و $(a,b)=1$. در این صورت $g(a,b)=ab-a-b$

اثبات: فرض کنید $N>ab-a-b$.

جواب‌های معادله‌ی $ax+by=N$ باید به صورت (x_0+bt,y_0-at) باشد که در آن t یک پارامتر صحیح است. (x_0,y_0) یک جواب اولیه از این معادله است. همچنین فرض کنید t عدد صحیحی است که $0\leq y_0-at\leq a-1$ در این صورت:

$$(x_0+bt)a=N-(y_0-at)b>ab-a-b-(a-1)b=-a$$

بنابراین $x_0+bt>-1$ و یعنی این‌که $x_0+bt\geq 0$. بنابراین در این حالت معادله‌ی $ax+by=N$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی حل شدنی است.

در نتیجه $g(a,b)\leq ab-a-b$. اکنون فقط باید نشان دهیم که معادله‌ی $ax+by=ab-a-b$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی جواب ندارد.

فرض کنید این گونه نباشد. داریم $ab=a(x+۱)+b(y+۱)$

از آن‌جایی که $(a,b)=۱$ در نتیجه $a|y+۱$ و $b|x+۱$ بنابراین $a\geq y+۱$ و $b\geq x+۱$ در نتیجه:

$$ab=a(x+۱)+b(y+۱)\geq ۲ab$$

تناقض به‌دست آمده نشان می‌دهد که:

$$g(a,b)\geq ab-a-b$$

و در نتیجه $g(a,b)=ab-a-b$.

پیش‌آزمون ۴

یکی از مهم‌ترین معادلات دیوفانتی معادله‌ی فیثاغورثی است:

$$x^۲ + y^۲ = z^۲ \quad (۱)$$

با توجه به مطالعه‌ای که فیثاغورث در مورد مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول اضلاع آن اعداد طبیعی است، انجام داده، این معادله حتی برای بابلیان باستان نیز شناخته شده بود.

توجه داشته باشید که اگر سه‌تایی $(x_۰, y_۰, z_۰)$ از اعداد صحیح در معادله‌ی (۱) صدق کند، آن‌گاه سه تایی به فرم $(kx_۰, ky_۰, kz_۰)$ نیز در معادله صدق می‌کند. $(k \in \mathbb{Z})$ به همین دلیل کافی است جواب‌هایی مانند (x, y, z) را بیابیم که y, x و z نسبت به هم اول باشند. جواب $(x_۰, y_۰, z_۰)$ از معادله‌ی (۱) را که در آن $z_۰, y_۰, x_۰$ دو به دو نسبت به هم اولند، یک جواب اولیه می‌نامیم.

قضیه: هر سه تایی اولیه‌ی (x, y, z) که در معادله‌ی (۱) صدق کند. به فرم زیر است:

$$x = m^۲ - n^۲ ,\ y = ۲mn\ ,\ z = m^۲ + n^۲$$

که در آن m و n دو عدد طبیعی متباین هستند و زوجیت آن‌ها با هم متفاوت است. همچنین در این روابط فرض بر آن است که $m > n$.

می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که $x = k(m^۲ - n^۲)$ و $y = ۲kmn\ ,\ z = k(m^۲ + n^۲)$

نیز جواب معادله‌ی فیثاغورثی است. $(k \in \mathbb{Z})$

اگر بخواهیم معادله‌ی فیثاغورث را به حالت بالاتر تعمیم دهیم، معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = t^۲$ را در نظر می‌گیریم. جواب‌های طبیعی این معادله متناظر با ابعاد یک جعبه‌ی مستطیل شکل است که طول قطرش t می‌باشد.

قضیه: همه‌ی جواب‌های طبیعی معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = t^۲$ با فرض زوج بودن y و z از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$x = \frac{l^۲ + m^۲ - n^۲}{n} \text{ و } y = ۲l\ ,\ z = ۲m\ ,\ t = \frac{l^۲ + m^۲ + n^۲}{n}$$

که در آن m, l اعدادی طبیعی و دلخواهند و n مقسوم‌علیه دلخواهی از $l^{2}+m^{2}$ است که از $\sqrt{l^{2}+m^{2}}$ کوچک‌تر است.

قضیه: معادله‌ی $x_{1}^{2}+x_{2}^{2}+x_{3}^{2}+\ldots+x_{k}^{2}=x_{k+1}^{2}$ دارای بی‌نهایت جواب صحیح به فرم زیر است. در رابطه‌ی زیر $m_{1}, m_{2}, m_{3}, \ldots, m_{k}$ اعدادی صحیح و دلخواهند.

$$x_{1}=m_{1}^{2}+m_{2}^{2}+m_{3}^{2}+\ldots+m_{k-1}^{2}-m_{k}^{2}$$

$$\begin{aligned} x_{2}&=2m_{1}m_{k}\\ &\vdots\\ x_{k}&=2m_{k-1}m_{k}\end{aligned}$$

$$x_{k+1}=m_{1}^{2}+m_{2}^{2}+m_{3}^{2}+\ldots+m_{k-1}^{2}+m_{k}^{2}$$

پیش‌آزمون ۵

معادله‌ی دیوفانتی $x^۲ + axy + y^۲ = z^۲$ را در نظر بگیرید. (در معادله‌ی دیوفانتی به دنبال جواب‌های صحیح هستیم.) با فرض $a \in \mathbb{Z}$ و انتخاب $a = ۰$ به معادله‌ی آشنای $x^۲ + y^۲ = z^۲$ می‌رسیم. بی‌شک با این رابطه در هندسه آشنا هستید. این رابطه همان رابطه‌ی مشهور فیثاغورث است.

قضیه: همه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $x^۲ + axy + y^۲ = z^۲$ با شرط $a \in \mathbb{Z}$ از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x = k(m^۲ - n^۲) \\ y = k(an^۲ - ۲mn) \\ z = k(amn - m^۲ - n^۲) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = k(an^۲ - ۲mn) \\ y = k(m^۲ - n^۲) \\ z = k(amn - n^۲ - m^۲) \end{cases}$$

که در آن $n \in \mathbb{Z}$ و m و k .

اثبات: توجه داشته باشید که دو دسته جواب بالا متقارن هستند. با جانشانی این روابط در معادله‌ی اصلی می‌توان به درستی جواب‌ها پی برد.

در واقع به کمک روابط فوق می‌توان معادله‌ی دیوفانتی زیر را نیز حل کرد:

$$x^۲ + xyw + y^۲ = z^۲ \qquad (۲)$$

همچنین می‌توان نشان داد که جواب‌های معادله‌ی $x^۲ + axy + by^۲ = z^۲$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x = k(m^۲ - bn^۲) \\ y = k(an^۲ - ۲mn) \\ z = k(amn - m^۲ - bn^۲) \end{cases}$$

دقت داشته باشید که $k, m, n \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های صحیح معادله‌ی دیوفانتی $x^۲ + xy + y^۲ = z^۲$ را به‌دست آورید.

حل: در معادله‌ی $x^۲ + axy + y^۲ = z^۲$ داریم $a = ۱$.

$$\begin{cases} x = k(m^2 - n^2) \\ y = k(2mn + n^2) \\ z = k(m^2 + mn + n^2) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = k(2mn + n^2) \\ y = k(m^2 - n^2) \\ z = k(m^2 + mn + n^2) \end{cases}$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$ ، m ، k و $m > n$

سوالات عمومی

۱. حاصل عبارت $\frac{۱}{۸}(\sin^{۸} x-\cos^{۸} x)-\frac{۱}{۳}\sin^{۶} x+\frac{۱}{۶}\cos^{۶} x+\frac{۱}{۴}\sin^{۴} x$ وقتی $x=۲۲/۵^\circ$ باشد، برابر است با:

۱) $-\frac{۱}{۲۰}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{-۱}{۱۶}$ ۵) $\frac{۱}{۱۸}$

۲. اگر $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۶۰^\circ$ و B,A و C زاویه‌های حاده باشند، مقدار عبارت زیر برابر است با:

$$\sec A \sec B \sec C+۲(\tan B \tan C+\tan A \tan B+\tan A \tan C)$$

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) -۲ ۴) $-\sqrt{۵}$ ۵) ۲

۳. در صفحه‌ی مختصات چند مربع وجود دارند که یکی از رأس‌هایشان نقطه‌ی $\begin{bmatrix}-۱\\-۱\end{bmatrix}$ بوده و حداقل یکی از محورهای مختصات محور تقارن مربع باشند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ ۵) ۶

۴. حاصل عبارت $(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})\times\ldots\times(۱-\frac{۱}{۱۰۰۰^{۲}})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰۰۰}{۲۰۰۱}$ ۲) $\frac{۱۰۰۱}{۲۰۰۰}$ ۳) $\frac{۱۰۰۱}{۱۰۰۰}$ ۴) $\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

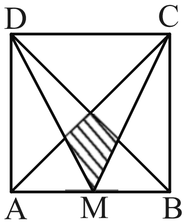
۵. معادله‌ی $x^{۴}+۱۶x-۱۲=۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) صفر

۶. نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ روی خط $x+y=۱$ قرار دارد و می‌دانیم که $|x|\le ۱$ و $|y|\le ۱$ حداکثر مقدار عبارت $\sqrt{۱-x^{۲}}+\sqrt{۱-y^{۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$ ۵) ۱

۷. در شکل زیر طول هر ضلع مربع ABCD برابر با یک واحد است. نقطه‌ی M وسط AB قرار دارد و DB و CA قطرهای مربع هستند. مساحت ناحیه‌ی هاشورخورده چیست؟



۱) $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$ ۵) $\frac{۱}{۳۶}$

۸. اگر $۱۶^{x}=۸^{۶۶۵}+۴^{۹۹۷}+۲^{۱۹۹۴}$ باشد، مقدار x برابر است با:

۱) ۹۹۷ ۲) ۷۷۹ ۳) ۴۴۹ ۴) ۴۹۹ ۵) ۳۹۹

۹. اگر $A=\{\sqrt{۲}-\frac{۱}{n}|n\in\mathbb{N}\}$، $B=\{۱+\frac{۱}{۲}+\ldots+\frac{۱}{۲n}|n\in\mathbb{N}\}$، $C=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,x^{۲}\le ۲\}$ و $D=\{\frac{m}{۲^{n}}|m,n\in N\}$ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر بزرگ‌ترین عضو دارد؟

۱) $C\cap D$ ۲) $A\cup B$ ۳) $C\cup A$ ۴) $R-D$ ۵) B

۱۰. اگر $a+b+c=۱$ و $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=۰$ ، آن گاه مقدار عبارت $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}$ برابر با چه عددی است؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) $\frac{۱}{۲}$

۱۱. کدام عدد زیر به ازای هیچ مقدار صحیحی از x به صورت $x+\sqrt{x}$ نیست؟

۱) ۸۷۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۹۰ ۴) ۶۰ ۵) ۳۰

۱۲. حداقل مقدار عبارت $2\sin\theta+3\cos\theta$ برابر است با:

۱) -2 ۲) -1 ۳) -4 ۴) صفر ۵) $-\sqrt{13}$

۱۳. به ازای کدام مقدار A تساوی $\tan^4 x-1=\frac{A}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^4 x}$ یک اتحاد است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲ ۵) $-\frac{1}{3}$

۱۴. با شرط $y>0$ و $xy=6$ ، مینیمم عبارت $21x+14y$ برابر است با:

۱) ۴۸ ۲) ۸۳/۵ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶ ۵) ۷۸

۱۵. به ازای چند عدد حقیقی مانند a معادله‌ی $x^2+ax+2007=0$ دارای دو جواب صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) ۲۰۰۷

سوالات اختصاصی

۱۶. معادله‌ی $x^2=y^2+24$ چنددسته جواب صحیح متمایز دارد؟

۱) کمتر از ۲ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) بیش‌تر از ۴

۱۷. اگر p عددی اول بوده و دستگاه $\begin{cases}p+1=2x^2\\ p^2+1=2y^2\end{cases}$ جواب صحیح داشته باشد، مقدار $p+x+y$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴ ۵) ۱۵

۱۸. چند مثلث فیثاغورثی می‌توان پیدا کرد که اضلاع آن‌ها طبیعی بوده و مساحتشان مربع کامل باشد؟

۱) بی‌شمار ۲) صفر ۳) یک ۴) دو ۵) سه

۱۹. اگر معادله‌ی $x+2y+z=n$ دقیقاً صد جواب در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی داشته باشد، مقدار n برابر با چه عددی است؟

۱) ۷ ۲) ۲۱ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶ ۵) ۲۰

۲۰. معادله‌ی $x^3-3xy^2+y^3=2891$ چند دسته جواب صحیح دارد؟

۱) بی شمار ۲) سه ۳) هیچ ۴) یک ۵) دو

۲۱. بزرگ‌ترین عدد طبیعی k که به ازای آن معادله‌ی $5x+6y=k$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی جواب ندارد، کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۲ ۳) ۱۷ ۴) ۳۳ ۵) ۱۶

۲۲. با توجه به روابط به‌دست آمده برای جواب‌های صحیح معادله‌ی $x^2+y^2=z^2$ ، به ازای کدام مقادیر m و n نمی‌توان جوابی به‌دست آورد؟

۱) $n=6$ و $m=7$ ۲) $n=4$ و $m=7$ ۳) $n=3$ و $m=10$

۴) $n=4$ و $m=9$ ۵) $n=3$ و $m=12$

۲۳. معادله‌ی زیر چند دسته جواب صحیح متمایز دارد؟

$$(x^2+1)(y^2+1)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$$

۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶ ۵) کمتر از ۵

۲۴. چند مثلث قائم‌الزاویه با طول اضلاع طبیعی می‌توان پیدا کرد که مساحت و محیط آن‌ها با هم مساوی شود؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار ۵) ۲

۲۵. چند زوج اول (p,q) می‌توان پیدا کرد که در رابطه‌ی $p^3-q^5=(p+q)^2$ صدق کنند؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) بیش از سه