هوالعلیم

دفترچه پیش‌آزمون و سوالات
آزمون مرحله‌ی مقدماتی (۸ اسفند ۱۳۹۳)
رشته‌ی ریاضی پایه‌های دوم و سوم متوسطه

عنوان	صفحه	مدت زمان پاسخ‌گویی
پیش‌آزمون‌ها	۱۰-۲	۱۵ دقیقه
سوالات ۱ تا ۱۵ عمومی، سوالات ۱۶ تا ۲۵ اختصاصی براساس پیش‌آزمون	۱۵-۱۱	۴۰ دقیقه
پاسخ‌گویی به کلیه‌ی سوالات به صورت گروهی است. بنابراین توصیه می‌شود پس از جمع‌بندی نهایی یکی از اعضای گروه مسوولیت وارد کردن پاسخ‌ها را در پاسخبرگ داشته باشد.		
به ازای هر ۴ پاسخ اشتباه، امتیاز یک پاسخ صحیح از بین می‌رود.		

لطفا توجه نمایید:

لیگ علمی پایا در مقطع دبیرستان(دوره دوم) در قالب گروه‌های ۵ نفره در رشته‌های ریاضی، فیزیک، شیمی و زیست شناسی برگزار می‌گردد.

مرحله‌ی مقدماتی لیگ علمی پایا شامل پیش‌آزمون، سوالات عمومی و سوالات پیش‌آزمون است.

۱) در قسمت اول آزمون هر کدام از اعضای گروه باید پیش‌آزمون مربوط به خود را از دفترچه جدا نموده و به صورت انفرادی مطلب آموزشی (پیش‌آزمون) خود را در مدت زمان ۱۵ دقیقه مطالعه نماید و به خاطر بسپارند.

۲) قسمت دوم آزمون شامل پاسخ‌گویی به ۱۵ سوال تستی ۵ گزینه‌ای از مطالب کتاب‌های درسی و منابع معرفی شده دانش‌آموزان به صورت گروهی می‌باشد.

۳) بخش سوم سوالات شامل پاسخ‌گویی به ۱۰سوال تستی ۵ گزینه‌ای است که همه اعضای گروه به کمک هم و با استناد به مطالب آموزشی که در بخش قبل مطالعه کرده‌اند، به آن‌ها پاسخ می‌دهند.

تذکر ۱. هر یک از اعضای گروه ملزم به مطالعه یکی از پیش‌آزمون‌ها می‌باشند و در غیر این صورت تخلف در آزمون محسوب می‌شود.

تذکر ۲. چنان‌چه گروهی ۴ نفره باشد، یکی از اعضای گروه علاوه بر مطالعه پیش‌آزمون مربوط به خود مسوولیت مطالعه پیش‌آزمون ۵ را نیز بر عهده دارد.

تذکر ۳. چنان‌چه گروهی ۳ نفره باشد، یکی از اعضای گروه می‌تواند مسوولیت مطالعه پیش‌آزمون ۴ را برعهده بگیرد و گروه مجاز به مطالعه پیش‌آزمون ۵ نمی‌باشد.

تذکر ۴. دفترچه سوال دانش‌آموزان پایه‌ی دوم و سوم دبیرستان (دوره‌ی دوم) یکسان می‌باشد.

تذکر ۵. هنگام پاسخ‌گویی به سوالات نیاز به جمع‌آوری پیش‌آزمون‌ها از دانش‌آموزان نمی‌باشد.

پیش‌آزمون ۱

چند جمله‌ای $P(x)$ را که به‌صورت زیر داده شده است، در نظر بگیرید:

$$P(\mathrm{x})=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1 x+a_0$$

می‌توان نشان داد که :

$$x_1+x_2+....+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+...+x_nx_{n-1}=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$x_1x_2x_3...x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

که در آن $x_1,x_2,...,x_n$ ریشه‌های چند جمله‌ای $P(\mathrm{x})$ هستند و به ازای آن‌هاه $P(x)=0$ می‌شود.

به عبارت دیگر می‌توان نشان داد که مجموع تمام حاصل‌ضرب‌های k تایی n ریشه‌ی فوق برابر است با:

$$(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

به روابط فوق، «روابط ویت» گفته می‌شود.

به طور مثال: اگر α,β و γ ریشه‌های چند جمله‌ای درجه‌ی سوم $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

پس می‌توان نوشت:

$$P(x)=a(x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma)$$

مثال: فرض کنید $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=(a+b+c)^{-1}$ و n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید:

$$a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}=(a+b+c)^{-n}$$

حل: چند جمله‌ای $P(x)=x^3+mx^2+nx+p$ را با ریشه‌های a,b و c در نظر بگیرید. بدین ترتیب $m=-(a+b+c)$ و $n=ab+ac+bc$ و $p=-abc$. از آن‌جا که $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ داریم:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}\Rightarrow\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow\frac{n}{-p}=\frac{1}{-m}\Rightarrow mn=p\Rightarrow$$

$$P(x)=x^3+mx^2+nx+p=x^3+mx^2+nx+nm=$$

$$x^2(x+m)+n(x+m)=(x+m)(x^2+n)\Rightarrow p(-m)=0$$

$$a=-m\Rightarrow b+c=0\Rightarrow b=-c\Rightarrow\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=$$

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{(-c)^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$$

که در این جا n باید عددی فرد باشد.

پیش‌آزمون ۲

شکل کلی یک نامساوی به‌صورت $x \geq y$ است که x و y دو عبارت بر حسب تعدادی متغیر می‌باشند. به عنوان نمونه، اگر ABC مثلثی با رئوس B, A و C باشد، داریم: $AB + AC > BC$

برخی از مهم‌ترین خواص نامساوی‌ها عبارتند از:

۱- اگر $A - B \geq ۰$ آن‌گاه $A \geq B$ و برعکس.

۲- اگر $A \geq B$ و $C \geq D$ آن‌گاه $A + C \geq D + B$ یعنی طرفین دو نامساوی را می‌توان با هم جمع کرد.

۳- اگر $A \geq B \geq ۰$ و $C \geq D \geq ۰$ آن‌گاه $AC \geq BD \geq ۰$

۴- اگر $A \geq B$ و m عددی مثبت باشد، آن‌گاه $mA \geq mB$

۵- اگر $A \geq B$ و m عددی منفی باشد، آن‌گاه $mA \leq mB$

حال به چند مثال حل شده توجه کنید:

مثال۱: اگر $۰ < r < ۱$ باشد، نشان دهید $r^۲ < r$.

حل: اگر طرفین نامساوی $r < ۱$ را در عدد مثبت r ضرب کنیم، نامساوی $r^۲ < r$ به‌دست می‌آید.

مثال۲: اگر $x \geq y$ آن‌گاه $x^۳ \geq y^۳$.

حل:

روش اول: کافی است ثابت کنیم $x^۳ - y^۳ \geq ۰$.

$$x^۳ - y^۳ = (x - y)(x^۲ + xy + y^۲)$$

می‌دانیم که $x - y \geq ۰$ پس باید نشان دهیم که $x^۲ + xy + y^۲ \geq ۰$ در این‌صورت چون حاصل‌ضرب دو عدد نامنفی، نامنفی است، حکم ثابت می‌شود. اگر $xy \geq ۰$ باشد، به وضوح $x^۲ + y^۲ + xy \geq ۰$ زیرا $x^۲ \geq ۰$ و $y^۲ \geq ۰$.

اگر $xy \leq 0$ آن‌گاه $-xy \geq 0$ اکنون داریم:

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = (x+y)^2 + (-xy) \geq 0$$

زیرا: $(x+y)^2 \geq 0$

روش دوم:

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq 0$$

مثال۳: اگر $x, y > 0$ نشان دهید.

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

حل:

$$\begin{cases} x^4 + y^2 \geq 2x^2y \\ x^2 + y^4 \geq 2y^2x \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2y^2x} = \frac{1}{xy}$$

پیش‌آزمون ۳

اگر $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ اعداد نامنفی باشند، آن‌گاه:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

به $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ واسطه‌ی حسابی یا میانگین حسابی اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ گفته می‌شود. بنابراین نامساوی بالا نشان می‌دهد که واسطه‌ی حسابی n عدد نامنفی بزرگ‌تر یا مساوی با واسطه‌ی هندسی آن‌هاست.

مثال۱: اگر $a,b,c \geq 0$ و $abc=1$ باشد، نشان دهید $a+b+c \geq 3$

حل:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \xrightarrow{abc=1} \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{1}=1 \Rightarrow$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq 1 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

مثال۲: اگر $a,b,c>0$ باشند، نشان دهید $a+b+c+\frac{1}{abc} \geq 4$

حل: اگر از نامساوی واسطه‌ی حسابی – هندسی چهارتایی استفاده کنیم،

$$\begin{cases} x_1=a \\ x_2=b \\ x_3=c \\ x_4=\frac{1}{abc} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

$$\frac{a+b+c+\frac{1}{abc}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \times \frac{1}{abc}}$$

$$a+b+c+\frac{1}{abc} \geq 4$$

مثال۳: اگر $abc=1$ و $a,b,c>0$ نشان دهید.

$$6a+3b^2+2c^3 \geq 11$$

حل: بنابر نامساوی واسطه‌ی حسابی – هندسی برای ۱۱ عدد زیر داریم:

$$\frac{a+a+a+a+a+a+b^2+b^2+b^2+c^3+c^3}{11} \geq \sqrt[11]{a^6b^6c^6}=1$$

$$\frac{6a+3b^{2}+2c^{3}}{11}\geq 1\Rightarrow 6a+3b^{2}+2c^{3}\geq 11$$

مثال۴: اگر $a,b,c>0$ نشان دهید.

$$a^{5}+b^{5}+c^{5}\geq abc(a^{2}+b^{2}+c^{2})$$

حل: بنا بر نامساوی واسطه‌ی حسابی – هندسی برای پنج عدد داریم:

$$3a^{5}+b^{5}+c^{5}\geq 5a^{3}bc$$

$$a^{5}+3b^{5}+c^{5}\geq 5ab^{3}c$$

$$a^{3}+b^{5}+3c^{5}\geq 5abc^{3}$$

با جمع کردن سه نامساوی بالا داریم:

$$5(a^{5}+b^{5}+c^{5})\geq 5abc(a^{2}+b^{2}+c^{2})$$

پیش‌آزمون ۴

اگر $a_1, a_2, ..., a_n$ و $b_1, b_2, ..., b_n$ اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

اثبات: فرض کنید

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + ... + (a_nx + b_n)^2$$

در این صورت بدیهی است که $f(x) \geq 0$.

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

این بدان معنی است که $f(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی دوم است که (ضریب x^2 در آن مثبت است) همواره نامنفی است. در نتیجه باید داشته باشیم: $\Delta < 0$

$$\Delta = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) < 0 \Rightarrow$$
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

به این نامساوی، نامساوی «کوشی – شوارتز» گفته می‌شود.

اگر در نامساوی کوشی – شوارتز قرار دهیم: $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$

خواهیم داشت:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)$$

مثال۱: اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ اعدادی حقیقی باشند، نشان دهید که:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) \geq n^2$$

حل:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{x_1} \\ a_2 = \sqrt{x_2} \\ a_3 = \sqrt{x_3} \\ \vdots \\ a_n = \sqrt{x_n} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \\ b_2 = \frac{1}{\sqrt{x_2}} \\ b_3 = \frac{1}{\sqrt{x_3}} \\ \vdots \\ b_n = \frac{1}{\sqrt{x_n}} \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$n^2 = (\sqrt{x_1} \times \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_2} \times \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \dots + \sqrt{x_n} \times \frac{1}{\sqrt{x_n}})^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n})$$

اگر تساوی در نامساوی کوشی – شوارتز برقرار باشد، به این معنی است که دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم صفر است و این معادله حتماً ریشه‌ای مانند α دارد.

$$(a_1\alpha + b_1)^2 + (a_2\alpha + b_2)^2 + \dots + (a_n\alpha + b_n)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$a_1\alpha + b_1 = 0 \ , \ a_2\alpha + b_2 = 0 \ , \dots , a_n\alpha + b_n = 0$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$$

پیش‌آزمون ۵

همان‌گونه که می‌توانیم اعداد را بر یکدیگر تقسیم کنیم و باقیمانده و خارج قسمت را پیدا کنیم، در چند جمله‌ای‌ها نیز می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

برای تقسیم دو چند جمله‌ای ابتدا هر یک از آن‌ها را بر حسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم و سپس تقسیم را انجام می‌دهیم.

به مثال زیر توجه کنید:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-x^3+2x^2+1 & x^2+x \\ \cline{2-2}
-x^4-x^3 \qquad\qquad & x^2-2x+4 \\ \cline{1-1}
-2x^3+2x^2+1 & \\
2x^3+2x^2 \quad\; & \\ \cline{1-1}
4x^2+1 & \\
-4x^2-4x & \\ \cline{1-1}
-4x+1 &
\end{array}
$$

بنابراین در تقسیم بالا خارج قسمت برابر با x^2-2x+4 و باقی‌مانده برابر با $-4x+1$ می‌باشد.

به عنوان مثال، با توجه به عمل تقسیم می‌توان گفت:

$$x^4-x^3+2x^2+1=(x^2+x)(x^2-2x+4)-4x+1$$

با توجه به عمل تقسیم در چند جمله‌ای‌ها در می‌یابیم که اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله‌ای باشند، آن‌گاه چند جمله‌ای‌های یکتای $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند، به‌طوری‌که: $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ که درجه‌ی $r(x)$ از $g(x)$ کمتر است. $q(x)$ خارج‌قسمت و $r(x)$ را باقی مانده می‌نامیم.

مثال: اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد به‌طوری‌که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-۱$ مساوی با ۳ و بر $x+۱$ برابر با ۱ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x^{۲}-۱$ چیست؟

حل:

$$f(x)=(x^{۲}-۱)\,q(x)+r(x)\ ,\ \ r(x)=ax+b$$

$$\begin{cases} f(۱)=۳ \\ f(-۱)=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(۱)=۳ \\ r(-۱)=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۳ \\ -a+b=۱ \end{cases} \Rightarrow a=۱\ ,\ b=۲ \Rightarrow r(x)=x+۲$$

سوالات عمومی

۱. بیش‌ترین مقدار ممکن برای تابع زیر در دامنه‌ی تعریفش کدام است؟

$$f(x)=\sqrt{۱-x}-\sqrt{x}+\sqrt{۱+x}$$

۱) $f(۱)$ ۲) $f(۰)$ ۳) $f(\frac{۱}{۲})$ ۴) $f(۱۰)$ ۵) مقدار ماکزیمم ندارد.

۲. اگر $f(x)=\frac{۴^x}{۴^x+۲}$ باشد، حاصل عبارت زیر در کدام گزینه داده شده است؟

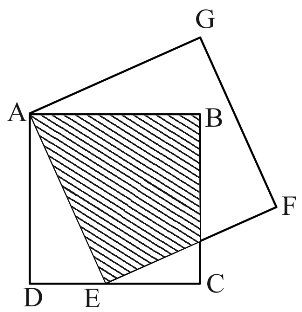
$$f(\frac{۱}{۱۴})+f(\frac{۲}{۱۴})+...+f(\frac{۱۳}{۱۴})$$

۱) ۷ ۲) ۸/۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۴/۵ ۵) ۵/۵

۳. دنباله‌ی $a_n(n\geq ۱)$ با شرط $a_۱=۱۹۹۹!$ و $a_{n+۱}=a_n$ *مجموع ارقام* تعریف شده است. مقدار $a_{۱۹۹۹}$ کدام است؟ $(n!=n(n-۱)(n-۲)\times...\times ۱)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶ ۵) ۹

۴. در شکل زیر $ABCD$ و $AEFG$ مربع‌اند. E وسط CD است و $AB=۱$. مساحت قسمت هاشورخورده شده چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۵. معادله‌ی $x^۲-[x]=۳$ چند جواب حقیقی دارد؟ ($[x]$ به معنی جزء صحیح x است.)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

۶. در یک مثلث قائم‌الزاویه که مجموع طول دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۲۰ می‌باشد، حداقل طول وتر کدام است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) $۱۵\sqrt{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵ ۵) $۸\sqrt{۲}$

۷. در مثلثی که اندازه‌ی اضلاع آن متفاوت است، یکی از ارتفاع‌ها برابر با ۴ و ارتفاع دیگر ۱۲ است. اگر ارتفاع سوم عددی صحیح باشد، بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای آن چیست؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷ ۵) ۸

۸. از نقطه‌ی O داخل مثلث ABC عمودهای OM, ON و OP را به‌ترتیب براضلاع AB, BC و AC رسم می‌کنیم. اگر $AM=۳$, $MB=۵$, $BN=۴$, $NC=۲$ و $CP=۴$ باشند، اندازه‌ی AP کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$ ۵) $۳\sqrt{۲}$

۹. اگر f تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد و $f(x)=f(-x)$ و $f(x)+f(y)+۶xy+۱=f(x+y)$ ، مقدار $f(۳)$ برابر است با:

۱) ۵۴- ۲) ۵۲- ۳) ۲۸- ۴) ۲۶ ۵) ۲۸

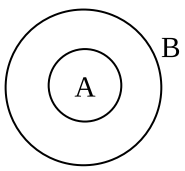
۱۰. مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n=n^۲+(۳m-۱)n+m-۴$ به‌دست می‌آید. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۰- ۴) ۸- ۵) ۱۲

۱۱. در مثلث ABC، H پای عمود وارد از C بر ضلع مقابل است. اگر $۲\mathrm{CH}\geq \mathrm{AB}$ در این صورت بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای زاویه‌ی C چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰ ۵) ۱۲۰

۱۲. اگر A و B دو مجموعه به شکل زیر باشند، کدام گزینه محدب نیست؟



۱) $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ ۲) $\mathrm{B}-\mathrm{A}$

۳) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ۴) $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$

۵) گزینه‌های ۱ و ۲

۱۳. چند مربع لاتین از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۶۴ ۳) ۵۷۶ ۴) ۱۲۸ ۵) هیچ‌کدام

۱۴. چند عدد صحیح مانند x **(با شرایط** $۹ < x < ۱۵$**) وجود دارند که دنباله‌ی متناهی** $۱,۲,۶,۷,۹,x,۱۵,۱۸,۲۰$ **مشتمل بر هیچ سه‌جمله‌ای نباشد که تشکیل یک دنباله‌ی عددی بدهند؟**

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه ۵) چهار

۱۵. مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث ABC **نسبت به یکی از اضلاع آن قرینه‌اند. اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه‌ی این مثلث چند درجه است؟** (دایره‌ی محاطی بر تمام اضلاع مثلث مماس است و دایره‌ی محیطی از سه رأس مثلث می‌گذرد.)

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۴ ۵) ۱۵۰

سوالات اختصاصی

۱۶. اگر $f(x)=۱+x+x^۲+...+x^{۱۹۹۹}$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^۵)$ بر $۱+x+x^۲+x^۳+x^۴$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱۰۰۰ ۳) -۱۹۹۹ ۴) ۲۰۰۰ ۵) ۱۹۹۹

۱۷. اگر $x_۱, x_۲, ..., x_n$ ریشه‌های معادله‌ی $x^n+x^{n-۱}+...+x+۱=۰$ باشند، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{۱}{۱-x_۱}+\frac{۱}{۱-x_۲}+\frac{۱}{۱-x_۳}+...+\frac{۱}{۱-x_n}=?$$

۱) n ۲) $n^۲$ ۳) $\frac{n}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{n}$ ۵) ۱

۱۸. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k که برای آن نامساوی زیر برقرار است، چیست؟ (فرض کنید اعداد حقیقی a و b مثبت هستند و می‌دانیم. $a+b=۱$)

$$(\frac{۱}{b}+۱)(\frac{۱}{a}+۱)\geq k$$

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹ ۵) ۱۲

۱۹. حداکثر مقدار عبارت $۳\sin x+۴\cos x$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) ۷ ۴) $۷\sqrt{۲}$ ۵) $\sqrt{۵}+\sqrt{۷}$

۲۰. مجموع مساحت و محیط مستطیلی برابر با ۱۴۰ شده است. حداکثر مساحت آن کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۷۰ ۳) ۸۰ ۴) ۶۰ ۵) نمی‌توان گفت

۲۱. با شرط $x^۲+y^۲+z^۲=۱$، بیشترین مقدار عبارت $x+۲y+۳z$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ ۲) ۱۴ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۶ ۵) $\sqrt{۱۴}$

۲۲. y, x و z سه عدد حقیقی‌اند و $xy + yz = ۱$. کم‌ترین مقدار عبارت $x^۲ + ۲۰y^۲ + ۴z^۲$ کدام است؟

۱) صفر　　　۲) ۱　　　۳) ۶　　　۴) ۸　　　۵) ۱۰

۲۳. دستگاه $\begin{cases} x+y+z=۴ \\ x^۲+y^۲+z^۲=۱۴ \\ x^۳+y^۳+z^۳=۳۴ \end{cases}$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارای چند دسته جواب متمایز است؟

۱) صفر　　　۲) دو　　　۳) چهار　　　۴) شش　　　۵) بی‌شمار

۲۴. اگر c, b, a و d ریشه‌های $Q(x) = x^۴ - x^۳ - x^۲ - ۱$ باشند و $P(x) = x^۶ - x^۵ - x^۳ - x^۲ - x$ باشند، حاصل $P(a) + P(b) + P(c) + P(d)$ برابر است با:

۱) ۶　　　۲) ۴-　　　۳) ۲-　　　۴) ۳　　　۵) صفر

۲۵. a و b اعداد حقیقی‌اند و می‌دانیم چند جمله‌ای $x^۴ + ax^۳ + bx^۲ + (a+b)x + b$ بر $x^۲ + bx + ۱$ بخش‌پذیر است. در این صورت ab کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$　　　۲) صفر　　　۳) ۱　　　۴) ۳　　　۵) ۴

دوستان عزیز! این سوالات به منظور آشنایی با نظرات شما در زمینه خدمات ارایه شده در لیگ علمی بین‌المللی پایا می‌باشد، بنابراین خواهشمند است به سوالات زیر به دقت پاسخ داده و ما را در ارایه‌ی خدمتی بهتر یاری فرمایید.

۸۱. مهم‌ترین راه آشنایی گروه شما با لیگ علمی بین‌المللی پایا از چه طریقی بوده است؟

۱. بروشورها و پوستر ارسالی به مدارس

۲. معرفی از طریق مسوولین و دبیران مدارس

۳. پیامک‌های دبیرخانه اجرایی

۴. آشنایی از طریق تیم‌های شرکت‌کننده در سال گذشته

۵. سایت علمی آموزشی لیگ علمی پایا

۸۲. سطح علمی سوالات عمومی را چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱. بسیار ساده　۲. ساده　۳. متوسط　۴. دشوار　۵. خیلی دشوار

۸۳. سطح علمی سوالات اختصاصی را چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱. بسیار ساده　۲. ساده　۳. متوسط　۴. دشوار　۵. خیلی دشوار

۸۴. سطح علمی پیش‌آزمون‌ها را چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱. بسیار ساده　۲. ساده　۳. متوسط　۴. دشوار　۵. خیلی دشوار

۸۵. نظم برگزاری این مرحله از مسابقه را چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱. خیلی خوب　۲. خوب　۳.متوسط　۴.ضعیف　۵. بسیار ضعیف

۸۶. نحوه‌ی برخورد مسئولین آزمون را چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱. خیلی خوب　۲. خوب　۳.متوسط　۴.ضعیف　۵. بسیار ضعیف

۸۷. نحوه‌ی اطلاع‌رسانی(زمان و محل برگزاری) این مرحله از مسابقه را چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱. خیلی خوب　۲. خوب　۳.متوسط　۴.ضعیف　۵. بسیار ضعیف

۸۸.تا چه اندازه برای آمادگی در این مرحله از آزمون، مطالعه‌ی قبلی داشته‌اید؟

۱. خیلی زیاد　۲. زیاد　۳.متوسط　۴.کم　۵. خیلی کم

۸۹. کیفیت علمی و اجرایی و سبک برگزاری لیگ علمی پایا را در مقایسه با سایر مسابقات علمی، چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱. خیلی خوب　۲. خوب　۳.متوسط　۴.ضعیف　۵. بسیار ضعیف

۹۰. در صورت استفاده از منابع لیگ علمی بین‌المللی پایا، کیفیت آن را چگونه ارزیابی نموده‌اید؟

۱. خیلی خوب　۲. خوب　۳.متوسط　۴.ضعیف　۵. بسیار ضعیف