

سوالات فردی پاسخ کوتاه آزمون مرحله‌ی نهایی پایه دوم و سوم دبیرستان - رشته ریاضی

مدت زمان پاسخ‌گویی: ۷۰ دقیقه

مرداد ماه ۱۳۹۵

توضیحات:

فقط جواب نهایی هر سوال را در قسمت مشخص شده برای آن بنویسید و از نوشتن هرگونه راه‌حل خودداری کنید. پاسخ خود را فقط با خودکار آبی نوشته و از به‌کاربردن لاک غلط‌گیر خودداری نمایید. استفاده از هرگونه وسیله‌ی الکترونیکی نظیر موبایل، تبلت و انواع ماشین حساب ممنوع است.

۱. معادله‌ی زیر برای $x \in (1, \infty)$ چند جواب متمایز دارد؟

$$\frac{x}{1+x} + x^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x-1}$$

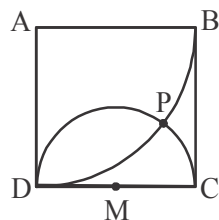
۲. مجموعه جواب معادله‌ی x و $y \in \mathbb{Z}$ و $1 + 1391y^2 = 2013x^2$ دارای چند عضو متمایز است؟ (راهنمایی: از بخش‌پذیری بر ۱۱ استفاده کنید.)

۳. تعداد عددهای سیزده‌رقمی با رقم‌های ۱ و ۲ که رقم هشتم (از سمت چپ) برابر ۱ باشد و ضمناً هیچ دو تا رقم ۲ با هم مجاور نباشند، چندتا است؟

۴. مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ را به‌دست آورید. (جواب را بر حسب x بنویسید.)

۵. توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4 + 3}$ و $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$ مفروضند. دامنه‌ی تابع $(f(g(x)))^{-1}$ را به‌صورت بازه (فاصله) بنویسید.

۶. طول ضلع مربع ABCD برابر ۴ و M وسط ضلع CD است. دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز M، دایره‌ی به شعاع ۴ و مرکز A را در نقطه‌های P و D قطع کرده است. فاصله‌ی P از AD چقدر است؟ (جواب را به صورت یک عدد اعشاری بنویسید.)



۷. در چند زیرمجموعه‌ی ده عضوی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ تفاضل هیچ دو عضوی برابر ۵ نیست؟ (جواب را به صورت یک عدد غیر توان دار بنویسید.)

۸. زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی با شرط $0 < x < \frac{\pi}{4}$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند. آن را بیابید.

$$\frac{(\sin x)^{2y}}{y^2} + \frac{(\cos x)^{2y}}{y^2} = \sin 2x$$

۹. فرض کنید اعداد حقیقی a ، b و c در روابط زیر صدق کنند:

$$2a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = 0$$

در این صورت کسر $\frac{a^2 + 1}{b^2 + c^2 + 1}$ چند مقدار مختلف را می‌تواند داشته باشد؟ (فقط شماره‌ی گزینه‌ی درست را در پاسخنامه بنویسید.)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) بیش از ۴

۱۰. اگر برای تابع حقیقی غیر ثابت f داشته باشیم: $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2f(xy)$ مقدار $f(1395^{2016})$ را به دست آورید.