



پیش‌آزمون مقدماتی

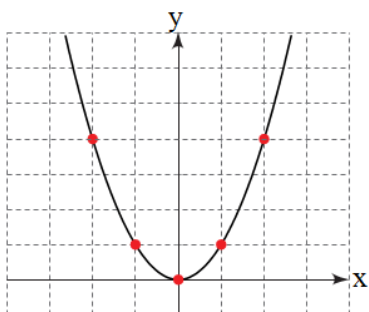
سهمی

معادله $y = x^2$ را در نظر بگیرید. چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند در جدول می‌نویسیم:

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$y = x^2$	$(-۳)^2 = ۹$	$(-۲)^2 = ۴$	$(-۱)^2 = ۱$	۰	$۱^2 = ۱$	$۲^2 = ۴$	$۳^2 = ۹$

حال نقاط $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ را در صفحه مختصات می‌یابیم و این نقاط را به هم وصل می‌کنیم.

شکل زیر بخشی از نمودار معادله $y = x^2$ است.



International Scientific League of PAYA 2018

بزرگترین رقابت علمی گروهی کشور

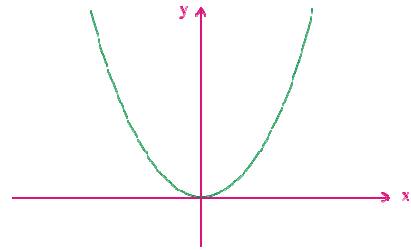
از پایه ششم ابتدایی تا دهم رشته‌های علوم پایه، علوم ریاضی، علوم تجربی، علوم انسانی، علوم کامپیوتر-برنامه‌نویسی و پژوهشی

تلفن: ۰۰۶۶۱۲۹۲۸۴-۰۳۵-۰۳۱-۰۳۱۲۸۰۶۶۱

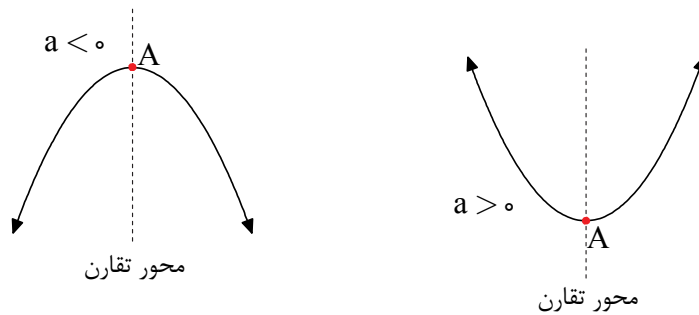
www.Payaleague.ir

[Telegram.me/payaleague](https://t.me/payaleague)

تعریف: به معادله $y = x^2$ «معادله سهمی» گوییم و نمودار آن به شکل زیر است:



در حالت کلی نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ که در آن a, b, c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی نامیده می‌شود که به یکی از دو صورت زیر است:



نقطه A در شکل‌های بالا رأس سهمی نامیده می‌شود.

با توجه به نمودارها، اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطه سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطه سهمی است. همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

نکته: معادله سهمی در حالت کلی به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ است که در آن $a \neq 0$ است. نقطه $A(x_0, y_0)$ رأس سهمی و خط $x = x_0$ خط تقارن سهمی می‌باشد.

مثال: نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید.

$$\text{الف) } y = 2(x - 1)^2 + 2$$

$$\text{ب) } y = x^2 + 2x + 1$$

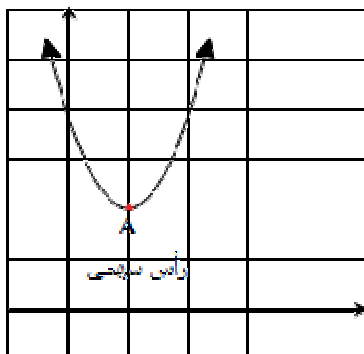
$$\text{ج) } y = -x^2 + 2x + 3$$

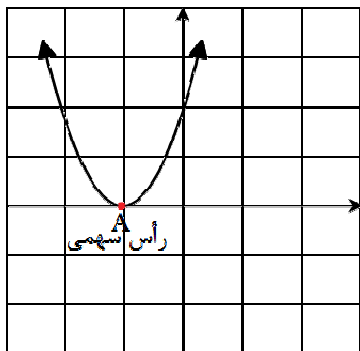
حل:

$$\text{الف) } y = 2(x - 1)^2 + 2$$

$x = 1$ خط تقارن سهمی، $A(1, 2)$ رأس سهمی

نقطه $A(1, 2)$ پایین‌ترین نقطه سهمی $\Rightarrow a = 2 > 0$

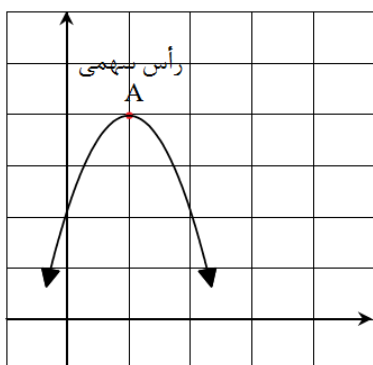




$$y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \text{ (ب)}$$

خط تقارن سهمی، رأس سهمی، $A(-1, 0)$

نقطه پایین‌ترین نقطه سهمی $A(-1, 0) \Rightarrow a = 1 > 0$



$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x) + 3 = -(x - 1)^2 + 4 \text{ (ج)}$$

خط تقارن سهمی، رأس سهمی، $A(1, 4)$

نقطه بالاترین نقطه سهمی $A(1, 4) \Rightarrow a = -1 < 0$

رأس و خط تقارن سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$:

سمت راست معادله $y = ax^2 + bx + c$ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

$$\Rightarrow y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

پس با توجه به حالت کلی معادله سهمی، رأس این سهمی نقطه $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ و خط تقارن آن

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ است.}$$

مثال: در سهمی $y = x^2 + mx + n$ ، m و n چه مقادیری باشند تا خط $x = -1$ خط تقارن سهمی باشد.

حل:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{m}{2} = -1 \Rightarrow m = 2$$

مثال: به ازای چه مقدار از m نقطه $A(m, m-2)$ رأس سهمی به معادله $y = x^2 - 2x$ است؟

حل:

$$y = x^2 - 2x$$

$$\text{رأس سهمی } A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = A\left(-\frac{-2}{2}, \frac{4 \times 1 \times 0 - (-2)^2}{4 \times 1}\right) = A(1, -1)$$

$$A(m, m-2) = A(1, -1) \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m-2 = -1 \Rightarrow m = 1 \end{cases}$$

مثال: خط $y = -\frac{5}{2}x$ محور تقارن سهمی $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود سهمی قطع می‌کند، مقدار a را به دست آورید.

حل:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times \frac{1}{2}} = 3$$

چون خط $y = -\frac{5}{2}x$ محور تقارن سهمی $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود سهمی قطع می‌کند، پس این خط از رأس سهمی می‌گذرد یعنی:

$$-\frac{5}{2} = \frac{1}{2} \times 3^2 - 3 \times 3 + a \Rightarrow -\frac{5}{2} = \frac{9}{2} - 9 + a \Rightarrow -5 = 9 - 18 + 2a \Rightarrow a = 2$$

مثال: اگر رأس سهمی $y = ax^2 + 2ax - 3$ روی نیم‌ساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار a را به دست آورید.

حل:

$$\text{رأس سهمی } A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = A\left(-\frac{2a}{2a}, \frac{4 \times a \times (-3) - (2a)^2}{4a}\right) = A(-1, \frac{-12a - 4a^2}{4a})$$

چون رأس سهمی روی نیم‌ساز ناحیه اول و سوم قرار دارد پس:

$$x = y \Rightarrow \frac{-12a - 4a^2}{4a} = -1 \Rightarrow -12a - 4a^2 = -4a \Rightarrow 4a^2 + 8a = 0$$

$$\Rightarrow 4a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غیرقابل قبول} \\ a = -2 \end{cases}$$

رابطه بین نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ و ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد و سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در دو نقطه محور

طول‌ها را قطع می‌کند که طول این نقاط ریشه‌های معادله هستند.

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک ریشه مضاعف دارد و سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در یک نقطه بر محور طول‌ها

مماس است که طول این نقطه تماس، ریشه مضاعف معادله است.

ج) اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد و سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور طول‌ها را قطع نمی‌کند.

مثال: نقاط برخورد سهمی $y = (x-1)^2 - 4$ را با محور x ‌ها پیدا کنید.

حل: y را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$(x-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \Rightarrow x-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$