یازدهمین دوره لیگ علمی بین‌المللی پایا

پیش‌آزمون مقدماتی

بردار

زنگ ریاضی

آذرماه شروع شده بود و سرمای پاییزی کاملاً حس می‌شد. دانش‌آموزان کلاس تلاش که در ابتدای سال تحصیلی همگی با لباس‌های خنک سرکلاس حاضر می‌شدند، دیگر نمی‌توانستند سرمای هوا را تحمّل کنند و به ناچار لباس‌های زمستانی خود را به تن کرده بودند. آفتاب کم‌رمقی هم از پنجره به داخل کلاس تابیده بود، تنها چیزی که می‌توانست سرما را از یاد دانش‌آموزان ببرد و آن‌ها را گرم کند، حضور آقای ایزدی و درس شیرین ریاضی بود که با وجود آقای ایزدی، شیرینی آن چند برابر می‌شد. انتظار دانش‌آموزان چندان به طول نینجامید و آقای ایزدی مثل همیشه، شاداب و سرحال وارد کلاس شد. قرار بود که درس آن جلسه و دو درس بعدی را خود آقای ایزدی تدریس کند. این موضوع برای دانش‌آموزان کنجکاو و تیزبین کلاس تلاش خیلی تعجب برانگیز و عجیب بود. ولی نکته‌ی مسلم آن بود که حتماً این مباحث دارای اهمیت خاصی بودند که آقای ایزدی در تدریس آن‌ها از گروه‌های دانش‌آموزی کمک نگرفته بود. پس از حضور و غیاب کلاسی، آقای ایزدی دفترکلاس را روی میزش گذاشت و به سمت تخته‌سیاه رفت. خوشبختانه آن روز در کلاس هیچ کس غایب نبود.

آقای ایزدی، مثل همیشه سخن خود را با نام خدا آغاز کرد و صحبتش را این‌گونه شروع کرد:

بچه‌ها! همان‌طور که می‌بینید ما می‌توانیم هر یک از اعداد را روی محور اعداد نشان دهیم. مثلاً در شکل زیر نقاط A، B و C به ترتیب نشان دهنده‌ی نقاط -2، $\frac{2}{3}$ و $2\frac{1}{4}$ می‌باشند.

International Scientific League of PAYA 2018

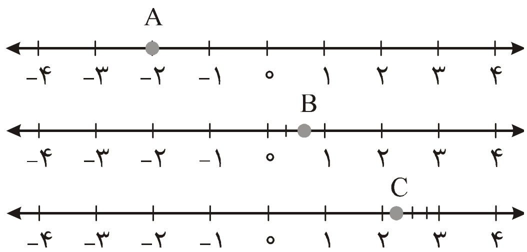
بزرگترین رقابت علمی گروهی کشور

از پایه ششم ابتدایی تادهم رشته های علوم پایه، علوم ریاضی، علوم تجربی، علوم انسانی، علوم کامپیوتر-برنامه نویسی و پژوهشی

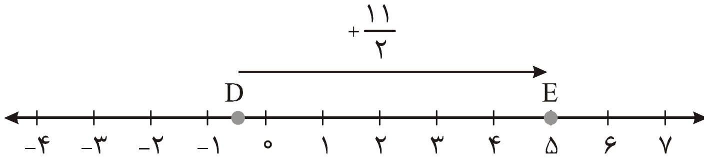
تلفن: ۶۶۱۲۹۲۸۴- ۶۶۱۲۸۰۳۵- ۶۶۱۲۸۰۳۱

www.Payaleague.ir

Telegram.me/payaleague



اگر کمی دقت کنید، می‌بینید که برای مشخص کردن هر نقطه‌ی دلخواه روی محور اعداد، فقط یک عدد کافی است. اکنون دو نقطه‌ی D و E را روی محور اعداد در نظر بگیرید. مقادیر عددی متناظر با نقاط D و E عبارتند از: $-\frac{۱}{۲}$ و ۵+.



اگر از نقطه‌ی D به نقطه‌ی E یک پاره‌خط جهت‌دار رسم کنیم، یک بردار به‌دست می‌آید که آن را با $\overrightarrow{DE}$ نمایش می‌دهیم. نقطه‌ی D ابتدا و نقطه‌ی E انتهای بردار $\overrightarrow{DE}$ هستند.

مختصات بردار $\overrightarrow{DE}$ عبارت است از مقدار عددی متناظر با نقطه‌ی E منهای مقدار عددی متناظر با نقطه‌ی D که برابر است با $+\frac{۱۱}{۲}$. در حقیقت، مختصات بردار در این‌جا علاوه بر طول بردار $\overrightarrow{DE}$ نشان دهنده‌ی جهت آن نیز می‌باشد.

آن‌چه را که در بالا به آن اشاره کردیم، نمایش یک بعدی بردارها روی محور اعداد بود. اما اگر نقطه‌ای روی صفحه‌ی کاغذ قرار داشته باشد و یا این‌که نقطه را در فضای داخل کلاس در نظر بگیریم، مسأله کاملاً متفاوت است. در این حالت از دستگاه مختصات دو بعدی برای صفحه‌ی کاغذ و دستگاه مختصات سه بعدی برای فضای داخل کلاس استفاده می‌کنیم.

آقای ایزدی که تا این لحظه پای تخته سیاه و مشغول ارائه‌ی توضیحات درس جدید بود، روی صندلی خود نشست تا برای چند دقیقه‌ای استراحت کند. در این موقع بود که محسن پرسید: آقا اجازه! می‌خواستم بپرسم که اصلاً دستگاه مختصات چه کاربردی دارد و چرا ما باید آن را یاد بگیریم؟

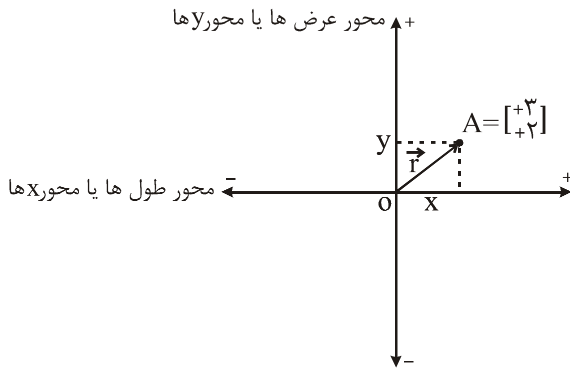
آقای ایزدی که هنوز یک دقیقه نشده بود که روی صندلی خود نشسته بود، گفت: اتفاقاً قصد داشتم تا قبل از این‌که درباره‌ی دستگاه مختصات دو بعدی توضیح دهم، درباره‌ی کاربرد آن کمی برای شما صحبت کنم. اگر اجازه بدهی، دو یا سه دقیقه‌ی دیگر و پس از این‌که همه‌ی دوستانت مطالب نوشته شده روی تخته سیاه را در دفترهای ریاضی خود یادداشت کردند، درباره‌ی این موضوع توضیح خواهم داد.

دانش‌آموزان کلاس تلاش همگی با اشتیاق خاصی مشغول یادداشت کردن نکاتی بودند که آقای ایزدی گفته بود. طولی نکشید که همه‌ی آن‌ها کار نوشتن را تمام کردند و با نگاه‌هایشان به آقای ایزدی فهماندند که منتظر ادامه‌ی درس هستند. آقای ایزدی که نگاه‌های منتظر و مشتاق دانش‌آموزان را می‌دید، بلافاصله از جای خود بلند شد و به طرف تخته سیاه رفت و پس از پاک کردن تخته سیاه، صحبت‌های خود را این‌طور ادامه داد: قبل از این‌که بخواهم درباره‌ی دستگاه مختصات دو بعدی و بردارهای دو بعدی صحبتی داشته باشم، ابتدا بهتر است که کمی درباره‌ی کاربرد دستگاه‌های مختصات به شما اطلاعاتی بدهم.

فرض کنید اتومبیلی در یک جاده‌ی مستقیم در حال حرکت باشد. اگر بخواهیم موقعیت مکانی این اتومبیل را در هر لحظه گزارش بدهیم، چه کار باید بکنیم؟ پاسخ به این پرسش بسیار آسان است. کافی است شما یک نقطه را به عنوان مبدأ یا مرجع انتخاب کرده و فاصله‌ی اتومبیل را در هر لحظه نسبت به آن نقطه در نظر بگیرید. چون اتومبیل بر روی یک خط راست در حرکت است، بنابراین دانستن فاصله‌ی اتومبیل در هر زمان از نقطه‌ی مبدأ و جهت حرکت آن، موقعیت مکانی آن را دقیقاً برای ما مشخص می‌کند. پس در این مثال، استفاده از محور مختصات یک بعدی که در این‌جا همان محور اعداد است، برای منظور ما کافی است. اکنون یک زمین فوتبال را در نظر بگیرید که توپ فوتبال روی آن در حرکت است. فرض کنید که توپ از روی زمین بلند نمی‌شود، در این صورت برای مشخص کردن موقعیت مکانی توپ در هر لحظه چه می‌کنید؟

در این لحظه پویا دست خود را بلند کرد و گفت: می‌توانیم فاصله‌ی آن را در هر لحظه از مرکز زمین فوتبال به‌دست آوریم. بدین ترتیب موقعیت آن کاملاً مشخص می‌شود.

آقای ایزدی لبخندی زد و گفت: اگرچه چیزی که پویا گفت: کاملاً درست نیست، اما برای شروع کار خوب است. اشکال اصلی پیشنهاد پویا این است که در آن، فقط به فاصله‌ی توپ اشاره می‌کند. در صورتی که اگر فقط فاصله‌ی توپ از مرکز زمین در نظر گرفته شود، شما نمی‌توانید موقعیت توپ را نسبت به مرکز زمین پیدا کنید. مثلاً فرض کنید که فاصله‌ی توپ از مرکز زمین فوتبال ۵ متر باشد. در این صورت، نتیجه می‌شود که توپ باید روی دایره‌ای به مرکز زمین فوتبال و به شعاع ۵ متر قرار داشته باشد. اما این‌که روی کدام نقطه، معلوم نیست. بنابراین بایستی دنبال روش دیگری باشیم. به همین منظور، روی زمین فوتبال دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم که محل تقاطع آن‌ها همان مرکز زمین فوتبال باشد. اکنون فاصله‌ی توپ فوتبال از هر یک از دو محور به همراه علامت آن، می‌تواند موقعیت مکانی توپ فوتبال را دقیقاً و در هر لحظه به ما نشان بدهد. برای روشن‌تر شدن این موضوع به شکل زیر توجه کنید:



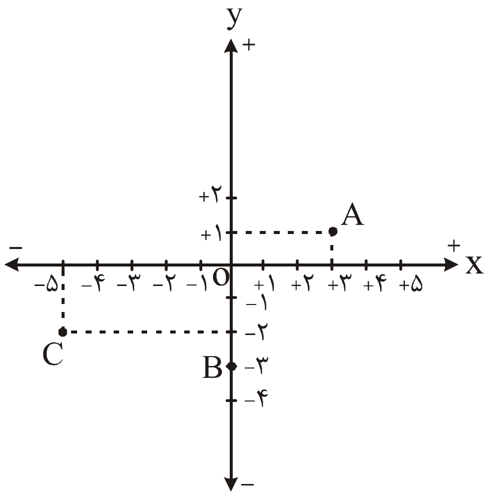
همان‌طور که می‌بینید، یکی از محورها در امتداد طول زمین و محور دیگر در امتداد عرض زمین است. به محوری که در امتداد طول زمین است و دارای راستای شرقی- غربی یا راست به چپ می‌باشد، محور طول‌ها یا محور **x**ها **گفته می‌شود. به محوری که در امتداد عرض زمین بوده و دارای راستای شمالی - جنوبی یا بالا به پایین است،** محور عرض‌ها یا محور **y**ها **گفته می‌شود. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، برای مشخص کردن موقعیت توپ نسبت به مرکز زمین فوتبال، لازم است که موقعیت آن را نسبت به هر یک از محورهای x و y به دست آوریم؛ به عنوان مثال، اگر توپ در نقطه‌ی A قرار داشته باشد، موقعیت آن نسبت به مرکز زمین فوتبال، که از این پس آن را** مختصات نقطه‌ی A **می‌نامیم، به صورت $A=\begin{bmatrix}+۳\\+۲\end{bmatrix}$ نوشته می‌شود.**

به نقطه‌ی O که همان مرکز زمین فوتبال است، مبدأ مختصات**گفته می‌شود و مختصات آن به صورت $O=\begin{bmatrix}۰\\۰\end{bmatrix}$ است.**

در نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}+۳\\+۲\end{bmatrix}$ (بخوانید A به مختصات $(+۳)$ و $(+۲)$) به $(+۳)$طول نقطه‌ی A **و به $(+۲)$**عرض نقطه‌ی A **گفته می‌شود. برای مشخص کردن علامت طول یا عرض(مثبت یا منفی بودن آن‌ها) از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم:**

اگر نقطه‌ای مانند P روی صفحه‌ی مختصات قرار داشته باشد، مختصات آن به صورت $P=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ نشان داده می‌شود که x فاصله از محور yها و y فاصله از محور xها می‌باشد. اگر P در طرف راست محور **x**ها **قرار داشته باشد،** طول آن با علامت مثبت **و اگر**در طرف چپ محور **x**ها **قرار داشته باشد،** طول آن با علامت منفی **نشان داده می‌شود. همچنین اگر نقطه‌ی P** بالای محور **y**ها **قرار داشته باشد،** عرض آن با علامت مثبت **و اگر** پایین محور y ها **قرار داشته باشد،** عرض آن با علامت منفی **در نظر گرفته می‌شود.**

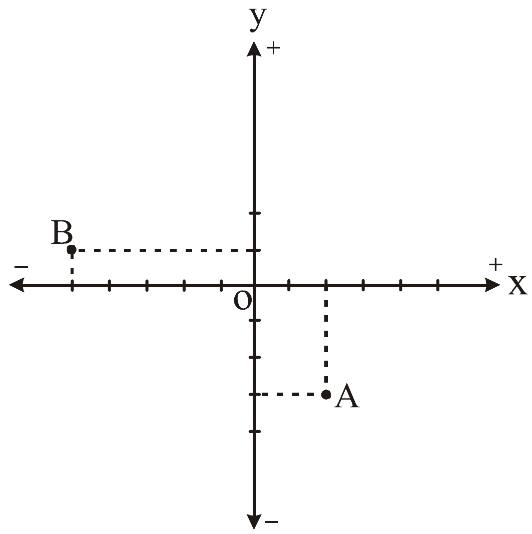
اکنون با توجه به آن‌چه گفته شد، می‌خواهیم مختصات نقاط A، B و C را که در دستگاه مختصات زیر نشان داده شده است، به‌دست آوریم:



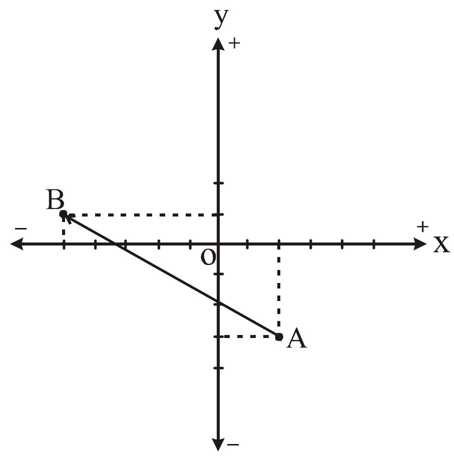
برای تعیین مختصات نقطه‌ی A کافی است از نقطه‌ی A دو عمود، یکی بر محور xها و دیگری بر محور yها رسم کنیم. عمود وارد بر محور xها، آن را در نقطه‌ی (۳+) و عمود وارد بر محور yها آن را در نقطه‌ی (۱+) قطع می‌کند. پس می‌توانیم مختصات نقطه‌ی A را به صورت $A=\begin{bmatrix}+۳\\+۱\end{bmatrix}$ بنویسیم. برای تعیین مختصات نقطه‌ی B باید بیشتر دقت کرد، زیرا همان‌طور که از روی شکل مشاهده می‌شود، این نقطه روی محور yها قرار دارد، پس فاصله‌ی آن از محور yها برابر با صفر است. همچنین فاصله‌ی نقطه‌ی B از محور xها برابر با ۳ واحد است و زیر محور xها قرار دارد، پس عرض آن برابر با ۳- می‌باشد. بنابراین با توجه به مواردی که گفته شد، مختصات نقطه‌ی B عبارت است از $B=\begin{bmatrix}۰\\-۳\end{bmatrix}$؛ مختصات نقطه‌ی C نیز برابر است با $C=\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}$.

آقای ایزدی که در این لحظه دستانش کاملاً گچی شده بود، دستان خود را به هم مالید تا آن‌ها را پاک کند. سپس در حالی که به طرف صندلی خود حرکت می‌کرد، گفت: اکنون دیگر با دستگاه مختصات دو بعدی آشنا شده‌اید و می‌دانید که مختصات یک نقطه را چگونه از روی دستگاه مختصات پیدا کنید. علاوه بر آن می‌توانید با داشتن مختصات یک نقطه، آن را بر روی دستگاه مختصات نمایش دهید. اکنون وقت آن است که با بردارهای موجود در این دستگاه مختصات آشنا شوید.

برای شروع، دو نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۵\\۱\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. من این دو نقطه را روی دستگاه مختصات نشان می‌دهم.



اکنون از A به B وصل می‌کنیم تا بردار $\overrightarrow{AB}$ به‌دست آید.



اگر از نقطه‌ی A شروع کنید و به اندازه‌ی ۷ واحد به طرف چپ و سپس به اندازه‌ی ۴ واحد به طرف بالا حرکت کنید، به نقطه‌ی B می‌رسید، بنابراین می‌توانیم بگوییم که مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ عبارت است از $\begin{bmatrix} -۷ \\ +۴ \end{bmatrix}$ که به زبان ریاضی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -۷ \\ +۴ \end{bmatrix}$$

به نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ نقطه‌ی ابتدا و به نقطه‌ی $B = \begin{bmatrix} -۵ \\ +۱ \end{bmatrix}$ نقطه‌ی انتهای بردار $\overrightarrow{AB}$ گفته می‌شود. اگر بخواهیم یک بردار را رسم کنیم، باید مختصات نقطه‌ی ابتدا و انتهای آن را بدانیم، در غیر این صورت نمی‌توانیم آن را رسم کنیم.

مهدی که تا این لحظه به دقت به حرف‌های آقای ایزدی گوش می‌داد، دست خود رابلند کرد تا چیزی بگوید، آقای ایزدی پرسید: مهدی جان! چه می‌خواهی بپرسی؟

مهدی گفت: می‌خواستم بگویم که ما با داشتن نقطه‌ی ابتدا یا انتها و نیز دانستن مختصات خود بردار $\overrightarrow{AB}$ نیز می‌توانیم آن را رسم کنیم. بنابراین، این‌که بگوییم شرط اصلی برای رسم یک بردار در صفحه‌ی مختصات، داشتن مختصات ابتدا و انتهای آن است، گفته‌ی صحیحی نیست؛ مثلاً ! اگر ما نقطه‌ی ابتدا یعنی $A=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ را در نظر بگیریم و بدانیم که مختصات بردار $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-۷\\۴\end{bmatrix}$ است، با جمع کردن مختصات نقطه‌ی A با مختصات $\overrightarrow{AB}$ می‌توانیم مختصات نقطه‌ی B را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}A=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}\\ \overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-۷\\+۴\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۷\\+۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\+۱\end{bmatrix}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-۵\\+۱\end{bmatrix}$$

اکنون که نقطه‌ی B به‌دست آمد، می‌توانیم بردار $\overrightarrow{AB}$ را روی صفحه‌ی مختصات رسم کنیم.

حال فرض کنید مختصات نقطه‌ی B یعنی انتهای بردار $\overrightarrow{AB}$ و مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ را داشته باشیم. با کم کردن مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ از مختصات نقطه‌ی B می‌توانیم مختصات نقطه‌ی A را به‌دست آوریم.

$$\left.\begin{array}{l}B=\begin{bmatrix}-۵\\+۱\end{bmatrix}\\ \overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}-۷\\+۴\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}-۵\\+۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۷\\+۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\+۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+۷\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینید، A مختصات ابتدای بردار $\overrightarrow{AB}$ است. با داشتن نقطه‌ی B که انتهای بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌باشد، می‌توانیم بردار $\overrightarrow{AB}$ را در صفحه‌ی مختصات رسم کنیم.

آقای ایزدی که بسیار ذوق زده شده بود، گفت: آفرین! کاملاً درست گفتی. می‌توانی به من بگویی که از کجا به این فکر رسیدی؟

مهدی گفت: خیلی ساده است. ما در دوران دبستان یا اول راهنمایی اعداد را روی محور نشان می‌دادیم. اگر دو عدد A و B را روی محور اعداد در نظر بگیریم، مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر می‌شود با $B-A$. در آن زمان می‌گفتیم:

انتهای بردار = مختصات بردار + ابتدای بردار

من با خودم فکر کردم که این رابطه همیشه درست است و باید در دستگاه مختصات دو بعدی و سه بعدی نیز همین‌گونه باشد.

آقای ایزدی لبخندی زد و سرش را به علامت تأیید تکان داد و گفت: بچه‌ها! روشی که مهدی به کار برده است، در ریاضیات دارای کاربرد بسیار زیادی می‌باشد. البته غیر از ریاضیات، در علومی نظیر فیزیک، شیمی و مهندسی از این نوع استدلال زیاد استفاده می‌شود.

آقای ایزدی ادامه داد: همان‌طور که می‌توانیم اعداد را با هم جمع یا تفریق کنیم. بردارها را نیز می‌توانیم با یکدیگر جمع یا تفریق کنیم. البته برای جمع یا تفریق بردارها باید از قواعد خاصی استفاده کنیم. نتیجه‌ی جمع یا تفریق دو بردار، همیشه یک بردار است. به طور کلی می‌توان حاصل‌جمع یا تفریق دو بردار را به یکی از دو روش زیر انجام داد:

۱ـ روش مختصاتی

۲- روش هندسی

در روش مختصاتی **کافی است که مختصات دو بردار را داشته باشیم و سپس آن‌ها را به روشی که در مثال زیر آمده است، با هم جمع یا تفریق کنیم.**

مثال۱: دو بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۶\\-۵\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. (باید این توضیح را بدهیم که بردارها را یا با حروف کوچک انگلیسی به صورت تک حرف و در صورتی که با دو حرف نشان دهیم، از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنیم.)

حاصل جمع و تفریق این دوبردار را به‌دست آورید.

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}-۶\\-۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\-۴\end{bmatrix}$$

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\begin{bmatrix}-۶\\-۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶\\-۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹\\-۶\end{bmatrix}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، برای به‌دست آوردن بردار تفاضل $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ بردار $\vec{a}$ را با قرینه‌ی بردار $\vec{b}$ جمع می‌کنیم، پس در این‌جا یک نتیجه‌ی دیگر نیز می‌توانید بگیرید و آن، این است که قرینه‌ی بردار $\vec{b}$ از قرینه کردن مختصات بردار $\vec{b}$ به‌دست می‌آید.

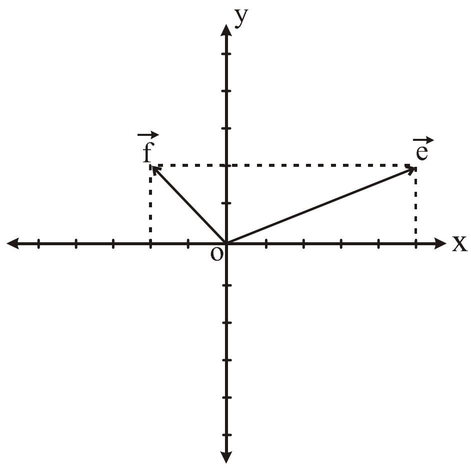
در روش دوم که روش هندسی **است، باید دقت بیشتری کنید. این مطلب را هم باید اضافه کنیم که روش هندسی برای جمع دو بردار به دو صورت انجام می‌گیرد:**

۱ـ روش متوازی الاضلاع

۲- روش مثلث

برای تفریق دو بردار نیز از روش مثلث **استفاده می‌کنیم.**

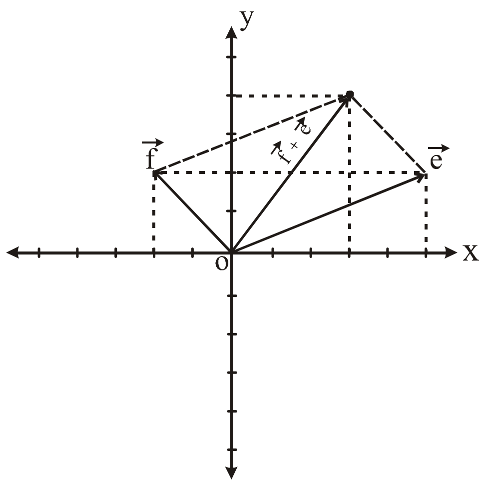
فرض کنید دو بردار $\vec{e}$ و $\vec{f}$ را مطابق شکل زیر در دستگاه مختصات داشته باشیم:



مختصات بردارهای $\vec{e}$ و $\vec{f}$ به صورت زیر است:

$$\vec{e}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \qquad \vec{f}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

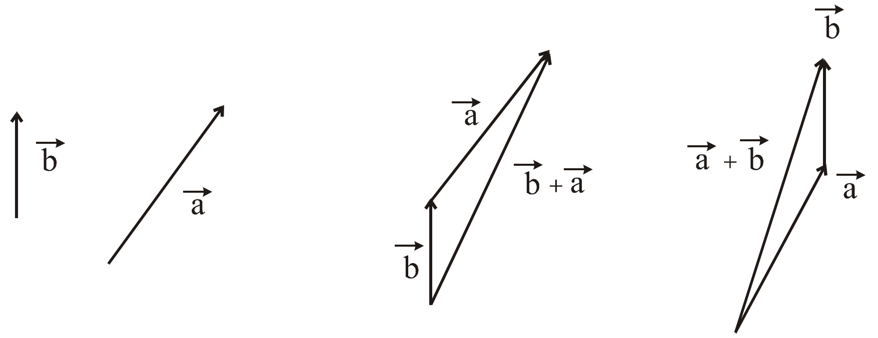
برای به‌دست آوردن حاصل‌جمع $\vec{e}$ و $\vec{f}$ به این روش عمل می‌کنیم: از انتهای بردار $\vec{e}$، به موازات $\vec{f}$، برداری مانند $\vec{f}$ رسم می‌کنیم. از انتهای بردار حاصل نیز به موازات $\vec{e}$، برداری مانند $\vec{e}$ رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی ابتدایی مشترک دو بردار به محل تقاطع بردارهای رسم شده وصل می‌کنیم. برداری که بدین ترتیب به‌دست می‌آید، حاصل‌جمع $\vec{e}$ و $\vec{f}$ می‌باشد.



به این روش جمع بردارها، روش متوازی الاضلاع گفته می‌شود. همان‌طور که متوجه شده‌اید، استفاده از روش متوازی الاضلاع در صورتی مفید است که هر دو بردار دارای ابتدای مشترکی باشند.

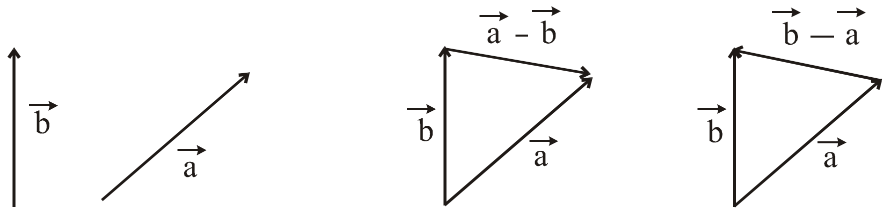
در روش دیگر جمع بردارها به صورت هندسی که روش مثلث نامیده می‌شود و اساساً شبیه روش متوازی الاضلاع می‌باشد، برای جمع بردارهایی مانند $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از انتهای یکی از این دو بردار (مثلاً $\vec{a}$)

بردار دیگر(مثلاً $\vec{b}$) را رسم می‌کنیم و سپس از ابتدای بردار $\vec{a}$ به انتهای بردار $\vec{b}$ وصل می‌کنیم. بردار به دست آمده، بردار حاصل جمع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. شکل زیر، این موضوع را بهتر نشان می‌دهد:



توجه کنید که: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

برای تفریق دو بردار مثلاً $\vec{a}-\vec{b}$ ابتدا بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را از نقطه‌ی ابتدایی مشترکی رسم می‌کنیم. سپس از انتهای بردار $\vec{b}$ به انتهای بردار $\vec{a}$، برداری رسم می‌کنیم. بردار حاصل برابر با $\vec{a}-\vec{b}$ است.



آقای ایزدی این شکل‌ها را روی تخته سیاه رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا آن‌ها را در دفترهای خود یادداشت کنند.

پویا سؤال کرد: آقا اجازه! چرا در این شکل‌ها از دستگاه‌های مختصات استفاده نکردید؟ آیا بردارها می‌توانند در جایی غیر از دستگاه‌های مختصات وجود داشته باشند؟

آقای ایزدی تبسمی کرد و گفت: نه این‌طور نیست. من دیگر دستگاه مختصات رسم نکردم، زیرا می‌خواستم شما بر روی بردارها متمرکز باشید. ولی اگر قرار باشد شکل را دقیق رسم کنیم، می‌بایستی محورهای مختصات را نیز رسم کنیم.

آقای ایزدی که معلوم بود امروز کمی خسته شده است، گفت: نکته‌ی دیگری که باید به شما بگویم، در مورد ضرب یک عدد در یک بردار است. «اگر عددی را در یک بردار ضرب کنید، برداری به‌دست می‌آید که با بردار اولیه موازی است.» اگر این عدد مثبت باشد، بردار به‌دست آمده و بردار اولیه هم جهت هستند و اگر این عدد منفی باشد، جهت بردار به‌دست آمده در خلاف جهت بردار اولیه خواهد بود. مثال زیر ضرب یک عدد در یک بردار را بهتر نشان می‌دهد.

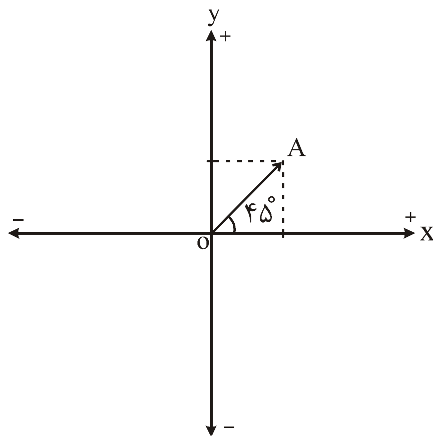
$$\vec{a}=\begin{bmatrix}۵\\-۶\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}۳\vec{a}=۳\begin{bmatrix}۵\\-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۵\\-۱۸\end{bmatrix}\\ -۲\vec{a}=-۲\begin{bmatrix}۵\\-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰\\+۱۲\end{bmatrix}\end{cases}$$

در این لحظه بود که در کلاس به صدا درآمد و آقای ناظم وارد کلاس شد و گفت: خسته نباشید آقای ایزدی. نمی‌خواهید تشریف ببرید؟ ۱۰ دقیقه است که زنگ خورده و همه‌ی دانش‌آموزان رفته‌اند. آقای ایزدی و دانش‌آموزان کلاس تلاش متعجب به ساعت‌هایشان نگاه کردند، آن‌ها آن‌قدر غرق در فضای درس شده بودند که حتی صدای زنگ مدرسه را نشنیده بودند. آقای ایزدی از آقای ناظم تشکر کرد و رو به بچه‌ها گفت: برای امروز کافی است. من تقریباً همه‌ی مطالب را در مورد بردارها به شما گفتم به جز بردارهای پایه. البته من مطالعه در این زمینه را به شما واگذار می‌کنم تا در حین انجام تمرین‌های کار در کلاس و فعالیت با آن‌ها آشنا شوید.

فرض کنید که می‌خواهید یک بردار را در صفحه‌ی مختصات مشخص کنید، همان‌طور که گفته شد، برای مشخص شدن یک بردار در صفحه‌ی مختصات بایستی ابتدا و انتهای آن مشخص باشد. به نظر شما آیا روش دیگری برای مشخص کردن یک بردار می‌تواند وجود داشته باشد؟ آیا زاویه‌ای که بردار با محور xها می‌سازد، می‌تواند نشان دهنده‌ی بردار باشد؟

برای ساده شدن کار، بردارهایی را در نظر بگیرید که ابتدای آن‌ها مبدأ مختصات باشد. اگر زاویه‌ای را که بردار با جهت مثبت محور xها می‌سازد، بدانیم و همچنین طول بردار داده شده باشد، می‌توان بردار را مشخص کرد.

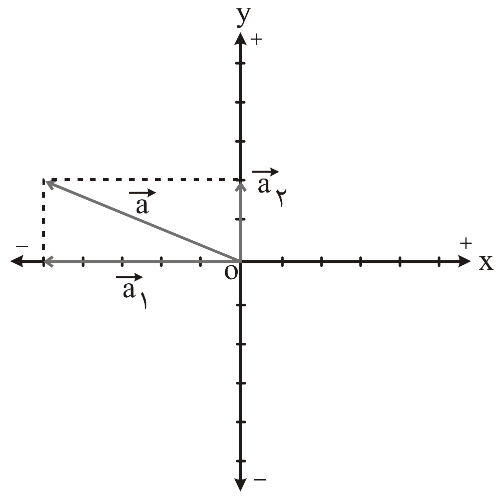
به عنوان مثال، در شکل زیر، اگر طول بردار $\overrightarrow{OA}$ برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$است.



اکنون برداری مثل $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۵\\ ۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید (ابتدای آن مبدأ مختصات باشد)، می‌توان این بردار را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\begin{bmatrix}-۵\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ ۲\end{bmatrix}=-۵\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

به شکل زیر که این بردار را در دستگاه مختصات نشان می‌دهد، توجه کنید:



اگر تصویر بردار $\vec{a}$ بر محورهای x و y را رسم کنیم، دو بردار $\vec{a}_۱$ و $\vec{a}_۲$ که در شکل بالا رسم شده‌اند، به‌دست می‌آیند. می‌بینیم که بردار $\vec{a}$ همان حاصل‌جمع $\vec{a}_۱$ و $\vec{a}_۲$ است.
این وضعیت برای هر بردار دیگری که بر روی محورهای x و y تصویر شود، برقرار است.

در حالت کلی اگر برداری مانند $\vec{b}$ را به صورت $\vec{b}=\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم، می‌توان رابطه‌ی زیر را نوشت:

$$\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_۱\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ b_۲\end{bmatrix}=b_۱\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}+b_۲\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

در حقیقت می‌توان $\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$ را بردارهایی در نظر گرفت که به ترتیب در امتداد محور xها و yها قرار دارند. اگر کمی دقت کنید، می‌بینید که می‌توان همه‌ی بردارها را برحسب این دو بردار نوشت. به همین دلیل به این بردارها، **بردارهای پایه** می‌گویند و آن‌ها را با $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نشان می‌دهند:

$$\vec{i}=\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix} \qquad \vec{j}=\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$$

پس اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}-۵\\ ۲\end{bmatrix}$ باشد، می‌توان نوشت: $\vec{a}=-۵\vec{i}+۲\vec{j}$.

استفاده از بردارهای پایه دارای کاربردهای بسیار زیادی در علومی نظیر فیزیک است.

به عنوان یک مثال فرض کنید که $\vec{b}=\begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}-۴\\-۶\end{bmatrix}$ باشند، می‌خواهیم مقدار m را طوری پیدا کنیم که تساوی زیر برقرار باشد:

$$۲\vec{i}-m\vec{j}=۳\vec{b}+\vec{c}$$

برای حل این مسأله ابتدا بایستی یا طرف راست را برحسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسیم و یا این‌که $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را به صورت $\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$ بنویسیم، ما راه دوم را انتخاب می‌کنیم.

$$۲\vec{i}-m\vec{j}=۳\vec{b}+\vec{c}$$
$$۲\begin{bmatrix}۱\\ ۰\end{bmatrix}-m\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴\\-۶\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}۲\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\-m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\-۱۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴\\-۶\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}۲\\-m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\-۲۱\end{bmatrix}\Rightarrow -m=-۲۱\Rightarrow \boxed{m=۲۱}$$

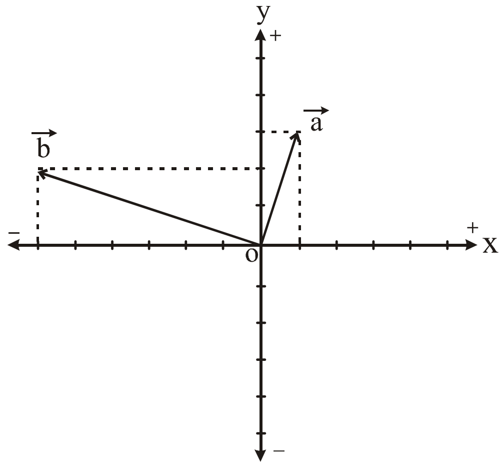
گاهی اوقات دانستن این موضوع که دو بردار با یکدیگر چه زاویه‌ای می‌سازند، بسیار مهم است. ما می‌توانیم زاویه‌ی بین دو بردار را با دانستن مختصات آن‌ها به‌دست آوریم. البته فرض ما بر این است که دو بردار دارای نقطه‌ی ابتدایی مشترکی هستند.

جالب‌ترین حالت برای ما زمانی است که دو بردار بر یکدیگر عمود باشند. در این بخش می‌خواهیم تا راهی را پیدا کنیم که به کمک آن می‌توان تشخیص داد که آیا دو بردار بر هم عمود هستند یا خیر؟

برای شروع کار، دو بردار $\vec{a}=\vec{i}+۳\vec{j}$ و $\vec{b}=-۶\vec{i}+۲\vec{j}$ را در نظر بگیرید، می‌دانید که $\vec{a}=\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۶\\ ۲\end{bmatrix}$ می‌باشند. اکنون عمل $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۶\\ ۲\end{bmatrix}=۱\times(-۶)+۳\times۲=۰$$

حال به شکل زیر که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در آن رسم شده‌اند، توجه کنید:



زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{a}$ را با استفاده از یک نقاله اندازه بگیرید. اندازه‌ی این زاویه چقدر است؟

اکنون عمل $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را که به آن **ضرب نقطه‌ای** دو بردار گفته می‌شود، برای بردارهای زیر انجام دهید. سپس شکل بردارها را به طور دقیق در یک دستگاه مختصات رسم کرده و زاویه‌ی بین هر جفت از بردارهای داده شده را با نقاله اندازه بگیرید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

$$\begin{cases}\vec{e}=5\vec{i}-2\vec{j}\\ \vec{f}=-4\vec{i}-10\vec{j}\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}\\ \vec{d}=2\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}\end{cases}$$

اگر شکل بردارها را درست رسم کرده باشید و در اندازه‌گیری زاویه‌ها نیز دقت به خرج داده باشید، به قضیه‌ی مهم زیر رسیده‌اید:

اگر حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار صفر باشد، آن دو بردار بر هم عمودند.

راستی یک سؤال! آیا ضرب نقطه‌ای دو بردار دارای خاصیت جابه‌جایی است، یعنی: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ ؟