



## پیش‌آزمون مقدماتی

توان

توان‌ها برای راحتی محاسبات ریاضی و بسیاری از علوم دیگر استفاده می‌شود. در واقع توان‌ها جز تغییر در نوشتن شکل ضرب چیزی نیستند. همان‌طور که خود عمل ضرب چیزی جز تغییر در نوشتن شکل عمل جمع نیست.

در واقع ضرب عملی است که عدد را چند بار با خودش جمع می‌کند. مثلاً ما به جای  $6+6+6+6$  می‌نویسیم،  $4 \times 6$  یعنی ۴ تا ۶ و البته می‌توانیم همان  $6+6+6+6$  را بنویسیم. اما گاهی محاسبات بسیار مشکل می‌شود. مثلاً اگر آدامسی ۶۵ تومان قیمت داشته‌باشد و ما بخواهیم ۲۷۳ عدد آدامس بخریم، آن وقت باید برای محاسبه قیمت آن ۶۵ را ۲۷۳ بار با خودش جمع کنیم تا قیمت کل آدامس‌ها محاسبه شود! در حالی‌که هر کسی می‌داند که کار با یک محاسبه ساده  $65 \times 273$  قابل حل است.

## International Scientific League of PAYA 2018

بزرگ‌ترین رقابت علمی گروهی کشور

از پایه ششم ابتدایی تا دهم رشته‌های علوم پایه، علوم ریاضی، علوم تجربی، علوم انسانی، علوم کامپیوتر - برنامه‌نویسی و پژوهشی

تلفن: -۶۶۱۲۹۲۸۴ -۶۶۱۲۸۰۳۵ -۶۶۱۲۸۰۳۱

[www.Payaleague.ir](http://www.Payaleague.ir)

[Telegram.me/payaleague](https://t.me/payaleague)

توان‌ها نیز برای سادگی در نوشتن عمل ضرب عدد، در خودش به کار می‌روند و ما می‌توانیم به جای عبارت

$6 \times 6 \times 6 \times 6$  عدد ۶، در خودش ضرب می‌شود بنویسیم  $6^4$  و آن را شش به توان چهار می‌خوانیم.

پس توان را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

توان عملگری است در ریاضی که به صورت  $\square^{\Delta}$  نوشته می‌شود (مربع و مثلث عدد یا یک حرف هستند) و به

$\square$  پایه و به  $\Delta$  توان یا نما می‌گوییم مثلاً وقتی می‌گوییم  $5^2$ ، معنی آن این است که عدد ۵، ۳ بار در خودش

ضرب شده است.

به عنوان مثال  $2^4$  را محاسبه می‌کنیم،  $2^4$  یعنی ۲ را ۴ بار در خودش ضرب کنیم.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

یا برای  $3^2$  داریم:

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

قوانین ساده توان

قانون اول: در جمع یا تفریق عبارت‌های توان‌دار، حاصل هر عبارت توان‌دار را باید به صورت جداگانه پیدا کنیم

و آن‌ها را جمع یا تفریق کنیم.

به عنوان مثال:

$$3^3 + 4^2 = (3 \times 3 \times 3) + (4 \times 4) = 27 + 16 = 43$$

یا

$$2^4 - 4^2 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) - (4 \times 4) = 16 - 16 = 0$$

در مثال آخر دیدیم که  $2^4$  با  $4^2$  برابر است. اما این مسأله همیشه برقرار نیست.

مثلاً  $3^2$  با  $2^3$  برابر نیست چون:

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

اما

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

مثال: حاصل  $1^{273}$  چند است؟

یعنی ۱ را ۲۷۳ بار در خودش ضرب کنیم.

$$\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 \times 1}_{273} = 1$$

قانون دوم: پس ۱ به توان هر عدد همان ۱ است.

قانون سوم: به یاد داشته باشید که هر عدد معمولی عددی توان دار با توان ۱ است. مثلاً ۵۰۰ همان ۵۰۰ است.

$$500^1 = 500$$

مثال: حاصل عبارت زیر را حل کنید.

$$3 \times 9^2 - 6^3$$

توجه کنید که برای محاسبه در همه حال ابتدا باید توان را بدست آوریم، سپس ضرب یا تقسیم و در آخر جمع

یا تفریق. پس:

$$3 \times 9^2 - 6^3 = 3 \times (9 \times 9) - (6 \times 6 \times 6) =$$

$$3 \times 81 - 216 = 243 - 216 = 27$$

قوانین ضرب اعداد توان دار

قانون اول: در ضرب اعداد توان دار اگر پایه‌ها مساوی باشند یکی از آنها را می‌نویسیم و توانها را با هم جمع

می‌کنیم. یعنی  $\square^{\Delta} \times \square^{\circ} = \square^{\Delta+\circ}$  دلیل این قانون را به سادگی با مثال زیر متوجه می‌شویم:

$$9^5 \times 9^2 = (9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9) \times (9 \times 9) = (9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9) = 9^7 = 9^{5+2}$$

مثال:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^{2+3} = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

قانون دوم: در ضرب اعداد توان دار اگر توان‌ها با هم برابر باشند آنگاه یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را در

هم ضرب می‌کنیم. یعنی  $\square^\Delta \times \bigcirc^\Delta = (\square \times \bigcirc)^\Delta$  دلیل درستی این قانون را به سادگی در مثال زیر متوجه

می‌شویم:

$$9^5 \times 7^5 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$$

$$(9 \times 7) \times (9 \times 7) \times (9 \times 7) \times (9 \times 7) \times (9 \times 7) =$$

$$= 63 \times 63 \times 63 \times 63 \times 63 = 63^5 = (9 \times 7)^5$$

قوانین تقسیم اعداد توان دار

قانون اول: در تقسیم اعداد توان دار اگر پایه‌ها مساوی باشند یکی از آن‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را از هم کم

می‌کنیم.

یعنی  $\frac{\square^\Delta}{\square^\bigcirc} = \square^{\Delta-\bigcirc}$  این قانون با یک مثال ساده قابل فهم تر است.

$$6^5 \div 6^3 = \frac{\cancel{6} \times \cancel{6} \times \cancel{6} \times 6 \times 6}{\cancel{6} \times \cancel{6} \times \cancel{6}} = 6 \times 6 = 6^2 = 6^{(5-3)}$$

قانون دوم: در تقسیم اعداد توان دار اگر توان‌ها مساوی باشند یکی از آن‌ها را می‌نویسیم و پایه‌ها را بر هم

تقسیم می‌کنیم. یعنی:  $\frac{\square^\Delta}{\bigcirc^\Delta} = \left(\frac{\square}{\bigcirc}\right)^\Delta$ . به عنوان مثال:

$$6^3 \div 2^3 = \frac{6 \times 6 \times 6}{2 \times 2 \times 2} = \frac{6}{2} \times \frac{6}{2} \times \frac{6}{2} = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = \left(\frac{6}{2}\right)^3$$

نکته: اگر هم توان و هم پایه‌ها با هم مساوی باشند، برای ضرب یا تقسیم می‌توانیم از هر کدام از روش‌ها استفاده کنیم و جواب به‌دست آمده از هر دو روش با هم برابر است.

حال با مثال‌های زیر دقت کنید.

مثال اول:

$$\frac{5^6}{5^6} =$$

اگر بخواهیم از قانون اول تقسیم اعداد توان‌دار آن را محاسبه کنیم. داریم:

$$5^{6-6} = 5^0$$

از طرفی می‌دانیم که هر عدد تقسیم بر خودش برابر ۱ است. پس:  $5^0 = 1$

و این یک قانون کلی است.

هر عدد به توان ۰ برابر عدد ۱ است. به عنوان مثال:

$$273^0 = 1$$

یا

$$(1005060305)^0 = 1$$

مثال دوم:

$$\frac{5^6}{5^8}$$

از قانون اول تقسیم اعداد توان‌دار داریم:

$$\frac{5^6}{5^8} = 5^{6-8} = 5^{-2}$$

همچنین از طریق محاسبه وقتی آن را به دست بیاوریم، داریم:

$$\frac{5^6}{5^8} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times 5 \times 5} = \frac{1}{5 \times 5} = \frac{1}{5^2}$$

پس داریم:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

و این یک قانون کلی است.

یعنی هر عدد به توان یک عدد منفی، برابر با معکوس آن عدد به توان مثبت است.

به عنوان مثال:

$6^{-2}$  یعنی  $\frac{1}{6^2}$  و همچنین می‌دانیم که عدد ۱ به توان هر عدد باز هم ۱ است.

پس،  $\frac{1}{6^2}$  برابر است با:

$$\frac{1^2}{6^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$