



سوالات مرحله نهایی لیگ علوم پایه

آبان ماه ۱۳۹۹

پایه هشتم

دستور العمل پاسخگویی و داور سوالات

مرحله یک- پاسخ‌گویی به سوالات: سوالات مسابقه یک هفته قبل از آزمون از طریق سامانه آموزش مجازی، کانال تلگرام و سایت اطلاع‌رسانی لیگ علمی پایا در اختیار گروه‌های منتخب قرار خواهد گرفت که گروه‌ها بایستی ظرف مدت یک هفته به این سوالات پاسخ دهند و سپس پاسخ سوالات را در قالب پاورپوینت و PDF در سامانه آموزش مجازی بارگذاری نمایند.

* این سوالات باز هستند و جواب معینی ندارند.

* در پاسخ‌دهی به سوالات می‌توانید از اساتید، مقالات و منابع معتبر آموزشی و کتابخانه‌ای استفاده نمایید.

* سوالات بایستی در تاریخ مقرر تحویل داده شوند و در صورت تاخیر در تحویل، امتیاز منفی به تیم ارایه‌دهنده تعلق خواهد گرفت.

* پاسخ هر سوال حداکثر بایستی ۱۰ صفحه داشته باشد و در قالب یک پاورپوینت ارائه شود.

* بعد از ارسال پاسخ‌ها، دانش‌آموزان حق تغییر و یا کامل کردن پاسخ‌ها را ندارند و ملاک ارزیابی پاسخ‌هایی است که برای دبیرخانه ارسال کرده‌اید و مورد داور اولیه قرار گرفته است.

International Scientific League of PAYA2020

بزرگترین رقابت علمی گروهی کشور و هشتمین دوره مسابقات دانش‌آموزان جهان اسلام در ایران

از پایه ششم ابتدایی تا دهم رشته‌های علوم پایه، علوم ریاضی، علوم تجربی، علوم انسانی، پژوهشی، کارآفرینی، علوم کامپیوتر و برنامه‌نویسی





مرحله دو-ارزیابی اولیه سوالات: کمیته‌ی مسابقات بعد از ارسال سوالات توسط گروه‌های منتخب سوالات را ارزیابی نموده و داروی اولیه انجام می‌گیرد. گروه‌هایی که به سوالات پاسخ نداده و طبق زمان‌بندی مسابقه برای دبیرخانه ارسال نکرده باشند؛ از حضور در رقابت پایانی حذف خواهند شد.

مرحله سه- ارزیابی نهایی: گروه‌های راه یافته به مرحله نهایی طبق جدول زمان‌بندی که قبل از مسابقه ارائه می‌گردد، جهت ارزیابی و مسابقه پایانی به صورت آنلاین به رقابت خواهند پرداخت.

در این مرحله هر گروه شرکت‌کننده در هر مرحله در یکی از دسته‌های زیر به قید قرعه در نقش‌های متفاوتی به رقابت می‌پردازند.

- **نقش گزارش‌گر:** گروه‌ها در نقش گزارش‌گر بایستی پاسخ سوالاتی که هیات داوران و گروه چالش‌گر مشخص می‌کنند را با استفاده از پاورپوینت ارائه دهند. (گروه‌ها حق تغییر پاسخ‌های خود را نسبت به آنچه که قبل از مسابقه ارائه داده‌اند را ندارند)

- **نقش چالش‌گر:** مساله‌هایی که تیم ارائه دهنده باید به آن‌ها پاسخ دهد را انتخاب می‌کند؛ نقاط ضعف و قوت تیم ارائه دهنده را بیان می‌کند و می‌بایست به سوالات هیات داوران جواب دهد. برای بررسی بهتر، پاسخ‌های گروه گزارش‌گر قبل از شروع هر راند در اختیار گروه چالش‌گر قرار می‌گیرد.

- **نقش داور:** یکی از اعضای این تیم پس از مشورت با سایر اعضا، با بیان مختصری عملکرد تیم گزارش‌گر و چالش‌گر را ارزشیابی و نتیجه‌گیری می‌کند.

- **نقش ناظر:** گروه‌ها در این نقش گروه می‌توانند از هر گروه دیگری سوال بپرسند.

در نهایت هیات داوران به نحوه ایفای نقش توسط گروه‌ها امتیاز خواهند داد و تیم‌های برتر را معرفی و ارزیابی خواهند نمود.

*مشخص کردن نقش‌ها طی قرعه‌کشی توسط کمیته‌ی مسابقات صورت می‌گیرد.

*لازم به ذکر است که پاسخ دادن به سوالات اختیاری **نبوده** و دانش‌آموزان موظف هستند که به همه سوالات پاسخ دهند. در صورت عدم پاسخ‌دهی به هر سوال امتیاز آن سوال محسوب نمی‌شود.



۱. استراتژی مات کردن

یک صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$ در نظر بگیرید که در آن n عددی زوج است. یک شاه سفید در مقابل با دو فیل و شاه سیاه قرارداد. حداقل و حداکثر حرکت های لازم برای مات شدن شاه سفید را بر حسب n به دست آورید. صفحه‌ی شطرنج با حروف n_1 تا n_n و اعداد ۱ تا n کالیبره شده و شاه سفید نخستین حرکت را شروع می‌کند. شاه سفید در نقطه $(n/2, n/2)$ قرار گرفته و شاه سیاه با یک خانه فاصله روبه‌روی آن قرارداد و دوفیل در کنار شاه سیاه در یک ردیف با آن قرار دارند.

۲. فرم‌های رزونانسی مولکول O_n

اتم‌ها می‌توانند با یکدیگر پیوندهای شیمیایی تشکیل دهند و مولکول‌ها را به وجود آورند. اتم‌های نافلزهایی مانند اکسیژن می‌توانند با یکدیگر پیوند کووالانسی تشکیل دهند که در هر پیوند کووالانسی هر اتم یک الکترون را با اتم دیگر به اشتراک می‌گذارد. اتم اکسیژن می‌تواند حداکثر دو پیوند کووالانسی تشکیل دهد. فرم‌های رزونانسی یک مولکول به فرم‌هایی گفته می‌شود که از جابه‌جاشدن الکترون‌ها در پیوندهای کووالانسی به وجود می‌آیند. فرض کنید مولکول‌هایی به فرمول‌های O_n داریم که این مولکول‌ها می‌توانند خطی یا حلقوی باشند. تلاش کنید رابطه‌ای برگشتی یا صریح برای تعداد فرم‌های رزونانسی این مولکول‌ها به دست آورید. دقت داشته باشید که لزوماً مولکولی به شکل O_n ممکن است وجود خارجی نداشته باشد یا احتمال تشکیلش بسیار کم باشد.

۳. هندسه‌ی ناقلیدسی هذلولوی و عکسبرداری فرا واقعی

در شاخه‌ای از هندسه که به هندسه‌های ناقلیدسی شهرت دارد و خود نیز شامل هندسه‌های مختلفی است، هندسه‌ی هذلولوی از اهمیت و جذابیت خاصی برخوردار است. فرض اساسی در هندسه‌ی هذلولوی آن است که از نقطه‌ای خارج از یک خط راست، حداقل دو خط موازی با آن می‌توان رسم کرد و این همان چیزی است که با تجربیات روزمره‌ی ما در تضاد آشکار است. می‌خواهیم به کمک یک عدسی محدب تصویری از یک جسم روی پرده یا صفحه‌ی عکاسی تشکیل دهیم.

چه محدودیت‌هایی در دنیایی با این نوع هندسه وجود دارد؟ فرمول مشهور عدسی‌های نازک $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ در این نوع

هندسه به چه صورت در می‌آید؟ تصویر به دست آمده دارای چه ویژگی‌هایی است؟



۴. بازی با کارتها

چهار دسته کارت به رنگ‌های آبی، قرمز، سبز و زرد داریم. هر دسته از ۱۳ شماره تشکیل شده است؛ مثلاً شماره ۱ آبی، ۵ زرد، ۹ قرمز، ۱۲ سبز، ... بنابراین تعداد کل کارتها ۵۲ تاست. یک بازی دو نفره با این کارتها به صورت زیر انجام می‌شود: کارتها را ابتدا به صورت تصادفی بُر می‌زنیم. سپس به دو دسته ۲۶ تایی تقسیم شده و به هرنفر یک دسته می‌رسد. هرنفراز دسته‌ی خود یک کارت را به طور تصادفی بیرون کشیده و وسط می‌گذارد. شماره‌ی هرکس که بیشتر باشد، هردو کارت را برمی‌دارد. در صورت تساوی اعداد، دوباره این کار انجام می‌شود و هرکس که عدد بیشتری را بیاورد، همه‌ی کارت‌هایی را که وسط ریخته شده اند، برمی‌دارد. بالاخره بازی تمام می‌شود. مجموع اعداد کارت‌های جمع‌آوری شده حساب می‌شود و برنده کسی است که امتیاز بیشتری کسب کرده است. ضمناً در صورتی که دو کارت جمع‌آوری شده در هر مرحله از بازی یک رنگ باشند، ۱۰ امتیاز اضافی نیز به آن فرد تعلق می‌گیرد. همچنین در صورتی که در کارت‌های یک نفر همه‌ی شماره‌های یک رنگ موجود باشند، ۵۰ امتیاز به او اضافه می‌شود. چه قدر احتمال دارد تا هردو بازیکن امتیاز مساوی کسب کنند؟

۵. میانگین زمانی حرکت‌ها داخل زمین

فرض کنید کره‌ی زمین یک کره‌ی همگن و کاملاً کروی باشد. جسمی داریم که می‌تواند از یک طرف کره‌ی زمین به طرف دیگر برود. از نقطه‌ی دلخواه A روی سطح داخلی کره‌ی زمین جسمی می‌تواند در یک جهت دلخواه روی یک خط مستقیم به طرف دیگر برود. پس از برخورد به سطح داخلی در نقطه B دوباره به نقطه‌ی A می‌رسد. در حرکت جسم فرض بر این است که مسیر حرکت جسم به صورت یک تونل توخالی درمی‌آید و راه برای حرکت جسم فراهم می‌شود. میانگین زمانی حرکت‌های بسیار زیادی که از یک نقطه‌ی دلخواه شروع می‌شود و به همان نقطه می‌رسند، محاسبه کنید.

۶. توپ در حال شلیک

توبی را در نظر بگیرید که لوله‌ی آن می‌تواند از زاویه‌ی صفر تا ۱۸۰ درجه را با افق بسازد. توپ روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارد. در لحظه‌ای که زاویه‌ی بین لوله‌ی توپ و افق برابر با A درجه است، توپ شروع به شلیک می‌کند و شلیک‌ها با فاصله‌های زمانی مساوی t انجام می‌شوند. روبروی توپ یک صفحه‌ی قائم قرار دارد که هر گلوله‌ی توپ



می‌تواند آن را سوراخ کند. پس از مدت زمان T الگوی به دست آمده روی صفحه چگونه خواهد بود؟ چقدر طول می‌کشد تا دیگر گلوله‌ای به صفحه برخورد نکند؟ در ابتدا توپ و صفحه در فاصله‌ی k از هم قرار دارند.

۷. شبکه‌ی فنرها

بنابر قانون «هوک» فشردگی یا کشیدگی یک فنر با نیروی وارد بر آن رابطه‌ی مستقیم دارد. البته این قانون تا جایی اعتبار دارد که نیروی وارده سبب تغییر شکل اصلی و دائمی فنر نشود. نسبت نیروی وارد شده به مقدار کشیدگی یا فشردگی فنر در قانون هوک، ثابت فنر نام دارد و یکای آن نیوتن بر متر است. اگر دو فنر به ثابت‌های k_1 و k_2 را به صورت سری پشت سرهم ببندیم، می‌توان نشان داد که به‌جای این دو فنر می‌توان فنری با ثابت $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ را قرار داد. در صورتی که اتصال به صورت موازی باشد، می‌توان فنری با ثابت $k_1 + k_2$ را به‌جای آن‌ها قرار داد. فرض کنید n فنر با ثابت‌های یکسان k را در اختیار داشته باشیم و همه‌ی ترکیب‌های ممکن از فنرها را بسازیم و ثابت فنر معادل هر شبکه را به دست آوریم. آیا می‌توان همه‌ی مقادیر 1 تا n را به دست آورد؟ میانگین وزن دار ثابت‌های فنر شبکه‌های ایجاد شده را به دست آورید.

۸. خالی شدن آب و روغن از قیف چرخان

قیفی به شکل مخروط ناقص و مایل به ارتفاع h و شعاع‌های r و R ($R > r$) در نظر بگیرید که با آب پر شده است. زاویه‌ای که قیف با سطح افق می‌سازد، برابر است با a درجه. قیف با سرعت زاویه‌ای ثابت b حول محور قائمی که بر قاعده‌ی کوچکش عمود است و از مرکزش می‌گذرد، می‌چرخد. سوراخی نیز در قاعده‌ی کوچک مخروط وجود دارد که شعاعش از صفر تا مقدار k به‌طور خطی زیاد شده و دوباره با همین سرعت بسته می‌شود. آیا حداکثر یا حداقلی برای b وجود دارد؟ مقدارش چیست؟ اگر به جای آب از روغن مایع استفاده شود، آیا در نتیجه‌ی مساله تغییری ایجاد می‌شود؟ تجزیه و تحلیل و جواب‌های شما باید براساس محاسبات و روش‌هایی باشد که در محدوده‌ی توانایی‌ها و دانش یک دانش‌آموز دوره‌ی اول متوسطه باشد. روش‌های به کار برده توسط شما ممکن است تقریبی نیز باشند.

۹. قطره‌ی باران

از دوره‌ی دبستان با چگونگی تشکیل باران آشنایی دارید. یک قطره‌ی باران را در نظر بگیرید. فرض کنید در ارتفاع معینی از سطح زمین مثلاً H یک قطره‌ی اولیه‌ی r کروی شکل باران به شعاع r تشکیل شده باشد. این قطره سفر خود را به طرف زمین شروع می‌کند. با در نظر گرفتن نیروی جاذبه و بادی که از جهت شمال شرق به جنوب غرب با سرعت ثابت v



می‌وزد و نیز نیروی مقاوم در برابر حرکت این قطره، شکل قطره‌ی کروی را به صورت یک رابطه‌ی تقریبی بر حسب زمان به دست آورید. دقت داشته باشید که در مسیر حرکت قطره رطوبت وجود دارد. فرض‌های خود را بنویسید.

۱۰. تخم‌مرغ پخته در تخم‌مرغ‌پز

احتمالا در منزل خود تخم‌مرغ‌پز دارید یا لاقل با آن آشنایی دارید. امروزه تخم‌مرغ‌پزهای متنوعی در بازار وجود دارند. برخی از آن‌ها ساده و برخی از آن‌ها پیشرفته‌اند و دارای آپشن‌های مختلف هستند. یک تخم‌مرغ‌پز ساده را در نظر بگیرید. پخت تخم‌مرغ از حالت خام تا عسلی و کاملا سفت را در نظر بگیرید. دمای تخم‌مرغ را به عنوان تابعی از زمان و سایر پارامترهای دخیل در این مورد به صورت یک فرمول تجربی به دست آورید. چه عواملی بر میزان سرعت پخت تخم‌مرغ در تخم‌مرغ‌پز موثر هستند؟ حداقل زمان مورد نظر چقدر خواهد بود؟ در صورتی که مقدار a گرم آب با دمای 15 سانتی‌گراد در تخم‌مرغ‌پز استفاده شود، چه مقدار آب لازم است تا در زمان بهینه و مساوی با تخم‌مرغ‌پز بتوانیم تخم‌مرغ را آب‌پز کنیم؟

۱۱. توپ و دروازه

زمین بازی استاندارد فوتبال را به صورت یک شبکه از نقطه‌های با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. عرض زمین را روی محور عرض‌ها و طول زمین را روی محور طول‌ها منطبق می‌کنیم و مبدأ مختصات را در یکی از گوشه‌های زمین قرار می‌دهیم و هر یک از محورها را به صورت 50 سانتی‌متر - 50 سانتی‌متر مدرج می‌کنیم. بنابراین مختصات هر نقطه در این شبکه‌ی شطرنجی به صورت ضربی از 50 (بر حسب سانتی‌متر یا 0.5 بر حسب متر) خواهد بود. در این زمین بازی توپ فقط می‌تواند روی خطوط شبکه حرکت کند. هر ضربه با روی پا از 10 تا 15 متر، هر ضربه‌ی بغل پا از 5 تا 10 متر و هر ضربه‌ی نوک پا حداکثر 5 متر می‌تواند توپ را حرکت دهد که مقدار این حرکت‌ها با توجه به شرایط زمین بازی و توپ و شدت ضربه‌ی وارد شده از طرف یا متغیر است. از نقطه‌ی دلخواهی با مختصات (a, b) توپ کاشته شده است. حداکثر و حداقل ضربه‌های لازم برای اینکه توپ وارد شود، بر حسب a و b محاسبه کنید. اکنون مساله را برای حالتی حل کنید که در سه نقطه روی خط دروازه سه دروازه‌بان قرار دارند که توپ‌های ارسالی با آن نقاط را می‌گیرند و مانع گل شدن آن‌ها می‌شوند.

